***Exercice I* (environ 12 points)**

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\ \vec{u}\ ;\ \vec{v})$. On prendra 2 cm comme unité sur chaque axe pour les constructions.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = 2$; $z_B = 1 + \sqrt{3}i$ et $z_C = 1 - \sqrt{3}i$.

1*a*) Donner la forme trigonométrique de z_B et en déduire celle de z_C.

1*b*) Construire rigoureusement les points A, B et C dans le repère précédent.

On se propose de déterminer l'ensemble noté $\mathfrak{D}$ formé par tous les points M d'affixe z tels que : $|z| = |z-2|$.

2*a*) Vérifier que les points B et C appartiennent à $\mathfrak{D}$. A appartient-il à $\mathfrak{D}$?

2*b*) Déterminer et construire l'ensemble $\mathfrak{D}$ en justifiant.

3) A tout point M d'affixe z, avec $z \neq 2$, on associe le point M'd'affixe z', où $z' = \frac{-4}{z-2}$.

a) Déterminer l'écriture algébrique des affixes des points B' et C'respectivement associés aux point B et C.

b) Démontrer que pour tout nombre complexe $z \neq 2$, on a : $|z'-2| = \frac{2|z|}{|z-2|}$.

c) Soit M un point d'affixe z appartenant à l'ensemble $\mathfrak{D}$. Démontrer que le point M'(associé à M) appartient à un cercle noté Γ dont on précisera le centre et le rayon. Construire Γ.

d) Justifier que B et C appartiennent à Γ.

***Exercice II* (4 *points*) (*les questions* 1), 2) et 3) *sont indépendantes*).**

1) Dans un repère orthonormé direct $(O\ ;\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ construire rigoureusement :

a) En bleu : l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $1 \leq |z| \leq 2$ ***et*** $arg(z) \in \left]\frac{-\pi}{2} ; \frac{\pi}{4}\right]$.
b) En vert : l'ensemble des points N d'affixe z tels que : $\arg(-z) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ***ou*** $\arg(z) = 0\ [\pi]$.

2*a*) Donner l'écriture algébrique du nombre complexe : $Z = \frac{1}{4}\left(cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + isin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$.

2*b*) Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel *n* tel que $|Z^n| \leq 10^{-5}$

3) Donner l'écriture trigonométrique de $Z' = -3\left(cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + isin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$.

***Exercice III* (environ 3 points)**

Soit M un point d'affixe z non nulle, et M'le point d'affixe $z' = \frac{-1}{\bar{z}}$.

1) Vérifier que pour tout complexe z non nul, $z' = \frac{-z}{|z|^2}$.

2) En déduire que O, M et M'sont alignés.

3) Les points M et M' peuvent-ils être confondus ? Justifier.

4) Si z appartient à $\mathbb{U}$, que peut-on dire des points M et M' ?

***Exercice IV* (environ 1 point)**

Sachant que z est un nombre complexe de module égal à 1, simplifier l'expression : $|1+z|^2 + |1-z|^2$.