Maths experte groupe 1 ***Devoir surveillé numéro 2*** ***Mercredi 16 Octobre 2024***

Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats. Calculatrices interdites !

Exercice I **(*environ* 10 *points*)**

1) Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes suivants :

$z = 1 - 4i$; $z'' = 8i$.

2) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants, en détaillant vos calculs.

$Z_1 = 13 - 4i - (-7-5i) + 3i$.

$Z_2 = (2 - i)(1 - 5i) - 2(3-4i)$.

$Z_3 = (\sqrt{2} - 2\sqrt{3}i)(\sqrt{2} + 2\sqrt{3}i)$.

$Z_4 = 1 + i + i^2 + i^3 + i^4$.

$Z_5 = \left(1 - \frac{2}{3}i\right)^2 + \left(2 - \sqrt{3}\,i\right)^2$.

Exercice II **(*les deux questions sont indépendantes*) (4 *points*)**

1) Donner l'écriture algébrique de $Z = \frac{-2+3i}{1-5i}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2iz + 1 - i = z + (3 + 2i)^2$

Exercice III **(*Environ* 4 *points*)**

a) Quelles sont les valeurs possibles du reste dans la division euclidienne d'un entier relatif n par 3 ?
. (1 point)
b) Factoriser en un produit de trois facteurs l'entier : $n^3 - 25n$. (1 point)
c) En déduire, à l'aide d'un raisonnement par disjonction de cas, que pour tout entier relatif n, l'entier $n^3 - 25n$ est divisible par 3. (2 points)

Exercice III **(*Environ* 2 *points*)**

1) Rappeler la définition de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

2) Soient $r \in \mathbb{Q}$, et $x \notin \mathbb{Q}$.

On se propose de montrer que l'équivalence suivante est vraie : ($rx \in \mathbb{Q}$) équivaut à : ($r = 0$).

a) Etablir que si $r = 0$, alors $rx \in \mathbb{Q}$.

b) Réciproquement, supposons que $rx \in \mathbb{Q}$.

A l'aide d'un raisonnement par l'absurde, prouver que $r = 0$.

En déduire l'équivalence cherchée.