

Exercice I (environ 9 points)

Soit A et B et C les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le nombre de lignes et de colonnes de chacune des matrices A, B et C.
2. Donner un exemple de matrice carrée d'ordre 2.
3. On appelle trace d'une matrice carrée la somme de ses éléments diagonaux. Calculer la trace de A.
4. Les produits suivants existent-ils ? Justifier et les calculer le cas échéant : AB ; BA ; AC.
5. Ecrire la matrice E suivante, sachant que E est une matrice carrée d'ordre 3 et que pour tous entiers i et j compris entre 1 et 3, ses coefficients e_{ij} vérifient : $e_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ i + j & \text{si } i \leq j \end{cases}$.
6. Simplifier les écritures suivantes, sachant que M désigne une matrice inversible d'ordre n :
i) $M \times I_n \times M^{-1}$ ii) $2M \times (3M^{-1} - 5I_n)$ iii) $(M - I_n)(2M^{-1} + 3I_n)$.

Exercice II (environ 2 points)

Soit M la matrice suivante : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer M^2 .
- 2) Montrer que M n'est pas inversible.

Exercice III (environ 3 points)

Soit a , un réel non nul et la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$.

- 0) Calculer A^2 .
- 1) Vérifier que : $A^2 - A - 2I_3$ est la matrice nulle.
- 2) En déduire que A est inversible, et exprimer A^{-1} en fonction de A et de I_3 .

Exercice IV (environ 6 points)

Une matrice carrée à 2 lignes et 2 colonnes est appelée matrice stochastique lorsque :

- Tous les coefficients de A sont des réels positifs ou nuls.
- La somme des éléments figurant sur une même ligne est toujours égale à 1.

- 0) La matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est-elle stochastique ?
- 1) Donner deux exemples de matrices stochastiques.
- 2) Soit B et C deux matrices stochastiques. A-t-on $B+C$ qui est une matrice stochastique ? Justifier.
- 3) Soit $K = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$.
 - a) Justifier que K est une matrice inversible.
 - b) Calculer K^{-1} (on attend des calculs, et pas un résultat parachuté par la calculatrice).
 - c) Une matrice stochastique inversible a-t-elle son inverse qui est stochastique ?

4) Soit $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

a) Démontrer que :

(P est stochastique) équivaut à : (Tous les coefficients de P sont positifs ou nuls et $PX = X$, où $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$).

b) Soit L et M deux matrices stochastiques d'ordre 2. Démontrer que LM est une matrice stochastique d'ordre 2.