Consignes à lire attentivement :

Ce travail qui porte sur la trigonométrie et la forme exponentielle est à rendre pour le 23 Avril.

Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 2 à 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Les DM ont un rôle crucial : ils permettent de vous faire assimiler le cours, de pratiquer des mathématiques, de rédiger, d'acquérir de l'aisance, et d'apprendre à travailler sérieusement.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt automatique de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction.

Les copies ou exercices rendus en retard, ou ne respectant pas ces consignes, ne seront pas corrigés.

Exercice I

Traiter les exercices suivants de votre livre : 18 page 79 ; 34 page 80 ; 42b) page 80 ; 50 page 81 ; 81 page 81 ; 100 page 88 ; 69 page 82+primitiver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos(2x)\sin^2(x)$.

Exercice II

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $]-\pi;\pi]$ l'équation : $\cos(2x) = \sin(x)$.

Exercice III ***(Dernier exercice du cours Page 11 pour une version zoomée.)***

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n.$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ de l'annexe 2.
L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1. **a.** Vérifier que $1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

   b. En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n,

$$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}.$$

   b. Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

3. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

   a. Interpréter géométriquement d_n.

   b. Calculer d_0.

   c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n).$$

   d. En déduire que la suite $(d_n)_{n \geqslant 0}$ est géométrique puis que pour tout entier naturel n,

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

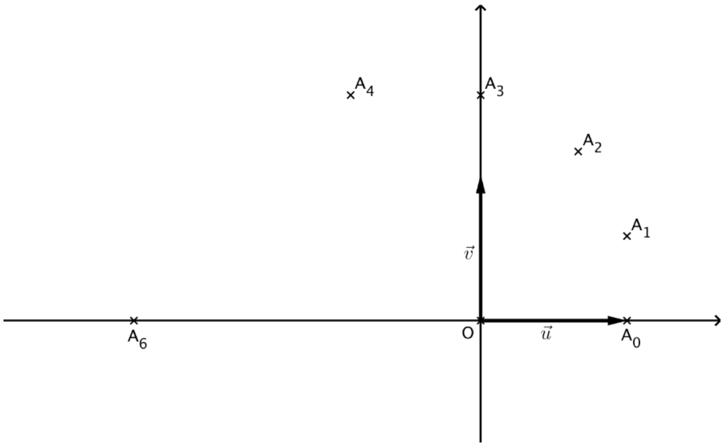
4. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2.$$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle en A_n.

c. Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de l'annexe 2 à rendre avec la copie.

d. Justifier cette construction.*



L'exercice suivant est issu de post bac. Il est facultatif.

Rappel sur la somme des termes d'une suite géométrique.

Soit q un nombre complexe :

– si $q \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

– si $q = 1$ et $n \in \mathbb{N}$, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = n + 1$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes :

1. $C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$

2. $C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^k(\theta)\cos(k\theta)$ et $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^k(\theta)\sin(k\theta)$

<u>Indication</u> : S'intéresser à chaque fois au calcul de C+*i*S !

3.

Soit la suite u définie par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(k) = \cos(0) + \cos(1) + \cos(2) + \cdots + \cos(n)$.

Montrer que cette suite est bornée. On rappelle qu'il s'agit de trouver une constante C (indépendante de n) telle que $|u_n| \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.

Soit θ un nombre réel de l'intervalle $]-\pi,+\pi[$. On pose $x=-\dfrac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}\cdot$

Déterminer la valeur de $e^{i\theta}$ en fonction de x.