***Consignes à lire attentivement* :**

Ce travail qui porte sur les nombres complexes est à rendre pour le 24 Février.

Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 2 ou 3 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Les DM ont un rôle crucial : ils permettent de vous faire assimiler le cours, de pratiquer des mathématiques, de rédiger, d'acquérir de l'aisance, et d'apprendre à travailler sérieusement.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt automatique de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction.

Les copies ou exercices rendus en retard, ou ne respectant pas ces consignes, ne seront pas corrigés.

Exercice 0

Faire les micros-exercices ou questions d'exercices suivants de votre livre :

29 page 53 ; 45 *a*) ; 46 *b*) ; 47 page 54 ; 52 page 55 ; 55 page 55 ; 60 page 55 ; 63 *c*) ; 64 page 55.

66 page 56 ; 75 *b*) ; 76 page 56 ; 77 *a*) ; 79 page 56 ; Facultatif : 109 page 63.

Exercice I

100 page 61

Exercice II ***(important, #je prépare le contrôle)***

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$, on appelle A, B, C et S les points d'affixes respectives : $4+i$; $4-i$; $-i$ et $1+2i$.

0) Placer ces points sur une figure à compléter au fil des questions.
1) Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Construire $\mathscr{C}$.
2) A tout point M d'affixe $z\neq 2$, on associe le point M' d'affixe z', avec : $z' = \frac{iz+10-2i}{z-2}$.

a) Déterminer l'écriture algébrique des affixes des points A', B' et C' associés aux points A, B et C.

b) Démontrer que A', B' et C' appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$' dont le centre est le point P ayant pour affixe i. Déterminer le rayon de ce cercle, et le tracer.

c) Pour tout nombre complexe z différent de 2, exprimer $|z'-i|$ en fonction de $|z-2|$.

d) Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathscr{C}$. Montrer que $|z'-i| = 2\sqrt{5}$. En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle $\mathscr{C}$.

Exercice III

Dire si la proposition suivante est vraie ou fausse, et justifier comme il se doit :

Proposition

Soit (E) l'équation : $(z-1)(-z^2+8z-25) = 0$, où $z \in \mathbb{C}$.

« Les points du plan ayant pour affixes les solutions de (E) sont les sommets d'un triangle rectangle ».

Exercice IV

1) Soit a et b deux nombres complexes non nuls.

Démontrer que si a et b ont le même module, alors $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un nombre réel. Démontrer que si a et b ont pour module 1, alors $\frac{(a+b)^2}{ab}$ est un nombre réel positif.

2) Démontrer l'équivalence suivante :

$$\left(z+\frac{1}{z} \in \mathbb{R}\right) \Leftrightarrow (z \in \mathbb{R}^* \text{ ou } |z|=1)$$

***Exercice V* (*Facultatif, cet exercice est issu de MPSI*)**

On considère les deux sous-ensembles de $\mathbb{C}$ suivants : $\Omega = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $\Delta = \{z \in \mathbb{C}, |z| > 1\}$.

0) Représenter graphiquement dans un repère orthonormé direct $(O\ ;\vec{u}\ ;\ \vec{v})$ les ensembles Ω et Δ.

a) Montrer que si un nombre complexe z appartient à $\Omega\backslash\{2i\}$, alors $\frac{z+2i}{z-2i}$ appartient à Δ.

b) On définit alors l'application $f : \begin{cases} \Omega\backslash\{2i\} \to \Delta \\ z \mapsto \frac{z+2i}{z-2i} \end{cases}$

Résoudre l'équation d'inconnue z : $f(z) = b$, où $b \in \Delta$.

c) Démontrer que la précédente solution appartient à $\Omega\backslash\{2i\}$.

d) Quel est l'image de l'axe des imaginaires purs, privé du point d'affixe $2i$ par f ?

e) Démontrer que l'image par f du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 2, privé de son point d'affixe $2i$, est contenu dans une droite que l'on précisera.

Etonnant cette application f qui transforme parfois un cercle en une partie de droite ? f porte le nom d'homographie, et à quelques choses près, on peut se ramener après quelques transformations géométriques, à l'étude de l'inversion g définie sur $\mathbb{C}^*$ par : $g(z)=\frac{1}{z}$. .

Nous étudierons en détail l'image d'un cercle-droite par cette inversion après le paragraphe du cours sur les arguments des nombres complexes non nuls.