Consignes à lire attentivement :

Ce travail qui porte sur le chapitre 1 d'arithmétique est à rendre pour le 2-7 Octobre.

Vous pouvez, au choix, rendre seul votre copie, ou rendre un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 2 ou 3 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Les DM ont un rôle crucial : ils permettent de vous faire assimiler le cours, de pratiquer des mathématiques, de rédiger, d'acquérir de l'aisance, et d'apprendre à travailler sérieusement.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt automatique de la correction de votre copie, et à l'absence de note pour le DM pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction.

Les copies ou exercices rendus en retard, ou ne respectant pas ces consignes, ne seront pas corrigés.

Exercice I

En rédigeant rigoureusement, trouver tous les couples d'entiers relatifs $(x\,;y)$ tels que : $x^2 - y^2 = 35$.

Exercice II ***(les deux questions sont indépendantes)***

1) Démontrer que pour tout entier naturel n impair, le nombre $n^2 - 1$ est divisible par 8.
2) Montrer que pour tout entier relatif n, si $\frac{n(n+2)}{4}$ n'est pas un entier, alors n est impair

Exercice III

1) Soit k un entier impair.

Démontrer que la somme de k entiers consécutifs est toujours divisible par k.

2) Le résultat démontré à la question précédente est-il vrai lorsque k est pair ? Justifier.

Exercice IV

Soit a, b et c des entiers relatifs.

On considère la fonction polynôme P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = ax^2+bx+c$.

1) Soit x un entier relatif. Montrer que si x est solution de l'équation $P(x) = 0$, alors x divise c.

2) Enoncer la réciproque de l'affirmation précédente. Cette dernière est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

3) L'équation suivante : $-15x^2 - 16x + 1 = 0$ admet-elle des solutions entières ? Justifier avec soin sans recourir à Δ.

4*) On suppose ici que l'équation $P(x) = 0$ admet deux solutions réelles.

Démontrer que les deux solutions sont soit toutes les deux rationnelles, soit toutes les deux irrationnelles.

Exercice V

En seconde, vous avez peut-être démontré l'irrationnalité de $\sqrt{2}$, c'est-à-dire qu'il est impossible d'écrire $\sqrt{2}$ comme quotient de deux entiers.

Vous trouverez ici (exercice 13 page 18) une preuve classique de ce résultat.

Il existe des dizaines de preuves différentes de ce résultat.

Nous allons voir une autre preuve de ce résultat dans cet exercice.

1) On raisonne par l'absurde en supposant $\sqrt{2}$ rationnel : il existe des entiers naturels non nuls p et q, avec q le plus petit possible, tel que : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Un tel choix de q est possible en prenant la fraction irréductible égale à $\sqrt{2}$).

a) Justifier que $p > q$.

b) Etablir que $p - q = q(\sqrt{2} - 1)$, puis en déduire que : $q > p - q$.

c) Etablir la relation suivante : $\sqrt{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$, puis en déduire que : $\sqrt{2} = \frac{2q-p}{p-q}$.

d) Relever une contradiction et conclure.

Application : Soit a, b, c et d quatre nombres rationnels.

Montrer que : $[a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}]$ équivaut à : $[b = d$ et $a = c]$.

**Cette dernière question est facultative.

Soient a et b deux nombres rationnels strictement positifs.

On suppose que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ sont des nombres irrationnels.

Montrer que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est un nombre irrationnel.

Remarque : les questions avec des étoiles sont nettement plus délicates, il ne faut pas vous affoler si vous avez du mal à les traiter ou si vous ne parvenez pas à les résoudre.

En mathématiques il faut faire preuve de beaucoup d'humilité et accepter de ne pas toujours tout trouver du premier coup !