Consignes à lire attentivement :

Ce travail est à rendre pour le 9 Décembre.

Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 2 à 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Les DM ont un rôle crucial : ils permettent de vous faire assimiler le cours, de pratiquer des mathématiques, de rédiger, d'acquérir de l'aisance, et d'apprendre à travailler sérieusement.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt automatique de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Les copies ou exercices rendus en retard, ou ne respectant pas ces consignes, ne seront pas corrigés.

Exercice I

Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $L=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer les 16 produits suivants : I^2, IJ, IK, IL, JI, J^2, JK, JL, KI, KJ, K^2, KL, LI, LJ, LK et L^2.
2) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels.

a) Calculer les quatre produits : XA où $X \in \{I, J, K, L\}$.

b) Calculer de même les quatre produits : AX, où $X \in \{I, J, K, L\}$.

3) Démontrer que toute matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels est une combinaison linéaire des matrices I, J, K et L.
4) Donner la matrice M carrée d'ordre 3, dont les coefficients m_{ij} sont définis par : $m_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{j} \text{ si } i < j \\ i + j \text{ si } i \geq j \end{cases}$.

Exercice II

Faire les micros-exercices ou questions d'exercices suivants de votre livre :

26 p.237 ; 34 *c*) p.237 ; 43 p.238 ; 52 p. 239.

Exercice II

Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n, où n est un entier non nul.

a) Démontrer que si A et B commutent, alors : $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.
b) Quid de cette relation si A et B ne commutent pas ?
c) Calculer : $(A + I_3)^2$ sachant que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice III

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier $(A - I)(A + 2I) = 0$. En déduire que A est inversible : préciser A^{-1}.
   De même, justifier que $A - I$ et $A + 2I$ ne sont pas inversibles.

2. Prouver l'existence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, de réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n I + b_n A$.

Exercice IV

Soient A, B et C trois matrices non nulles de $M_3(\mathbb{R})$, telles que : $A \times B \times C = O_3$.

Montrer qu'au moins deux de ces matrices ne sont pas inversibles.