Maths expertes Groupe 1 et 2 ***Devoir à la maison numéro 2 sur les matrices*** ***Décembre 2024***

Travail à rendre pour le Lundi 6 Janvier par groupes de 2 à 4 élèves

Exercice I

Trouver tous les réels a pour lesquels la matrice M est inversible, où : $M = \begin{pmatrix} a+1 & a^2-1 \\ -1 & -a-1 \end{pmatrix}$

Exercice II

Faire les exercices (ou questions d'exercices) suivants de votre livre : 48 p. 238, 55a) p.239, 79 p.243

Exercice III

104 page 249.

Exercice IV

102 page 249.

Exercice V

n est un entier non nul. Soit A $= (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. On appelle transposée de la matrice A, la matrice notée ${}^{T}A$, définie par : ${}^{T}A = (w_{ij})$, où pour tous entiers i et j compris entre 1 et n : $w_{ij} = a_{ji}$.

a) Ecrire les matrices transposées des matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 9 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

b) Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels : A est appelée matrice symétrique (respectivement antisymétrique) lorsque : ${}^{T}A = A$ (respectivement ${}^{T}A = -A$).

i) Proposer 3 exemples de matrices symétriques, dont une à coefficients non nuls, et 3 exemples de matrices antisymétriques.

ii) Que peut-on dire des éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique ? Le démontrer.

iii) Déterminer toutes les matrices carrées d'ordre n qui sont à la fois symétriques et antisymétriques.

Soit X un vecteur colonne à n lignes et à coefficients réels : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

iv) Démontrer que : ${}^{T}XX \geqslant 0$. Lorsque $n = 2$, quel résultat de géométrie retrouvez-vous ?

c) Soit A une matrice carrée d'ordre n. On appelle vecteur propre de A, tout vecteur colonne X non nul, qui a n lignes, et tel qu'il existe un réel noté λ, tel que : $AX = \lambda X$.

i) Vérifier que $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et préciser la valeur propre correspondante à ce vecteur propre. De même avec : $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ii) Montrer que si X est un vecteur propre associé à une valeur propre λ d'une matrice A, alors, pour tout entier naturel k, X est un vecteur propre de la matrice A^k. Préciser la valeur propre correspondante.

Les exercices suivants, facultatifs, sont des exercices pour se préparer aux exigences des CPGE.

Exercice VI

109 page 253.

Exercice VII

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On note $C(A) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid MA = AM\}$, l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A : montrer que $C(A)$ stable par addition.

Est-il stable pour la multiplication matricielle ?

Montrer que si $M \in C(A)$ est une matrice inversible, alors $M^{-1} \in C(A)$.