Consignes à lire attentivement :

Ce travail qui porte sur les congruences est à rendre pour le 19 Mars.

Vous rendrez votre copie, avec un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 2 ou 3 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Les DM ont un rôle crucial : ils permettent de vous faire assimiler le cours, de pratiquer des mathématiques, de rédiger, d'acquérir de l'aisance, et d'apprendre à travailler sérieusement.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt automatique de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction.

Les copies ou exercices rendus en retard, ou ne respectant pas ces consignes, ne seront pas corrigés.

Exercice I

On considère l'équation (E) : $11x^2 - 7y^2 = 5$, avec $x, y \in \mathbb{Z}$..

1) Démontrer que si le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de (E), alors $x^2 \equiv 2y^2$ (5).
2) Soit x et y des entiers relatifs. Recopier et compléter les deux tableaux suivants :

$x \equiv \ldots$ (5)	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv \ldots$ (5)					

$y \equiv \ldots$ (5)	0	1	2	3	4
$2y^2 \equiv \ldots$ (5)					

   Quelles sont les valeurs possibles du reste de la division de x^2 et de $2y^2$ par 5 ?
3) En déduire que si $(x\ ;\ y)$ est solution de (E), alors x et y sont des multiples de 5.
   Conclure sur les solutions de (E).

Exercice II

Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, en justifiant comme il se doit :

a, b et x désignent des entiers relatifs, et n un entier naturel non nul.

Affirmation 1 : « *Si* $a \equiv b$ $[n]$, alors : $a^2 \equiv b^2$ $[n]$ ».

Affirmation 2 : « *Si* $3a \equiv 3b$ $[6n]$, *alors* $a \equiv b$ $[2n]$ »,

Affirmation 3 : « $x^2 + x + 3 \equiv 0$ $[5]$, si et seulement si $x \equiv 1$ $[5]$ ».

Affirmation 4 : « *Le reste dans la division euclidienne de* 10^{2023} *par* 15 *est égal à* 6 ».

Affirmation 5 : « *Pour tout entier naturel n non nul,* $2^n - 1$ *n'est jamais divisible par* 9 ».

Exercice III

0) Soit n un entier naturel. Démontrer qu'il existe des entiers naturels a et b uniques tels que : $n = 10a+b$ et $0 \leqslant b \leqslant 9$.

1) Établir la liste des multiples de 13 inférieurs à 100.
2) Montrer que : $n \equiv 0\ (13) \quad \Leftrightarrow \quad a + 4b \equiv 0\ (13)$.
3) Énoncer en français un critère simple de divisibilité par 13.
4) En déduire, sans calculatrice, les multiples de 13 parmi les entiers suivants : 676, 943, 4 652, 156 556.

Exercice IV

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose $A(n) = n^4 + 1$.

1) Étudier la parité de l'entier $A(n)$.
2) Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
3) Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$: $n^8 \equiv 1\ (d)$.

Exercice V

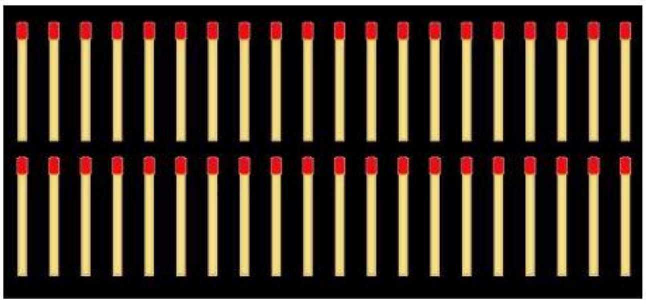
70 p.153 du livre.

Exercice VI

On considère l'équation suivante : $14x^2 + 7y^2 = 10^n$, où les inconnues x *et* y sont des entiers relatifs et n est entier naturel. A l'aide de congruences modulo à vous de voir, démontrer que cette équation n'a aucune solution entière.

Exercice final ***(facultatif, il est mignon et concret celui-la).***

Sur la figure ci-dessous, 40 allumettes sont disposées sur le tapis.



Deux joueurs prennent chacun, à tour de rôle, une, deux trois ou quatre allumettes. Celui qui prend la dernière allumettes perd la partie.
Il existe une stratégie gagnante pour le joueur qui commence. Laquelle ?