Exercice I

1a) $z_B = 1+\sqrt{3}\,i$, donc $\boxed{|z_B|} = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \boxed{2}$

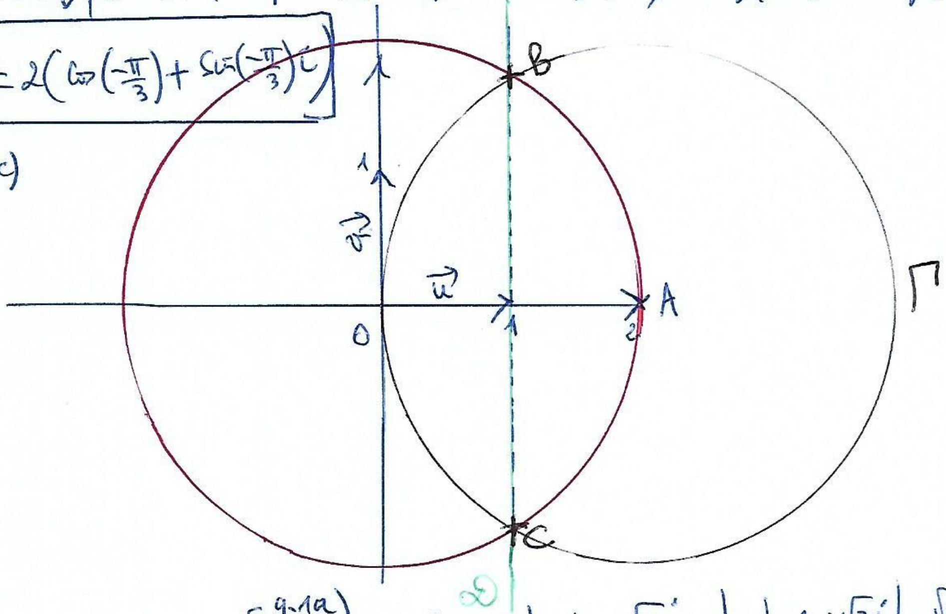
Soit θ un argument de z_B : $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{Re(z_B)}{|z_B|} = \dfrac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{Im(z_B)}{|z_B|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ Donc $\boxed{\theta = \frac{\pi}{3}}$

Ainsi $\boxed{z_B = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)i\right)}$

Vu que $z_C = \overline{z_B}$, on a : $|z_C| = |\overline{z_B}| = |z_B| = 2$ et $\arg(z_C) = \arg(\overline{z_B}) = -\arg(z_B) = -\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

donc $\boxed{z_B = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)i\right)}$

1b) et 2b) et 3c)



2a) $z_B = 1+\sqrt{3}\,i$, donc $|z_B| \overset{(q.1a)}{=} 2$ et $|z_B - 2| = |1+\sqrt{3}\,i - 2| = |-1+\sqrt{3}\,i| = \sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2} = 2$

Donc $|z_B - 2| = |z_B|$, donc $\boxed{B \in \mathcal{D}}$.

$z_C = \overline{z_B}$, donc $|z_C - 2| = |\overline{z_B} - 2| = |\overline{z_B} - \overline{2}| = |\overline{z_B - 2}| = |z_B - 2| = |z_B| = |\overline{z_B}| = |z_C|$

Ainsi, $|z_C - 2| = |z_C|$, donc $\boxed{C \in \mathcal{D}}$.

$|z_A| = |2| = 2$ et $|z_A - 2| = |2-2| = 0$, donc $|z_A - 2| \neq |z_A|$, donc $\boxed{A \notin \mathcal{D}}$.

2b) Soit $M(z)$: $M(z) \in \mathcal{D} \iff |z| = |z-2| \iff |z_M| = |z_M - z_A| \iff OM = AM$

$M(z) \in \mathcal{D}$ équivaut à M équidistant des points O et A ce qui équivaut à M appartient à la médiatrice de $[OA]$. Ainsi, $\boxed{\mathcal{D} \text{ est la médiatrice du segment } [OA]}$.

3) $z \neq 2$ et $z' = \dfrac{-4}{z-2}$

a)

$$z_B' = \frac{-4}{z_B-2} = \frac{-4}{1+\sqrt{3}i-2} = \frac{-4}{-1+\sqrt{3}i} = \frac{-4(-1-\sqrt{3}i)}{(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)} = \frac{+4(1+\sqrt{3}i)}{(-1)^2+\sqrt{3}^2}$$

$$\boxed{z_B'} = \frac{4(1+\sqrt{3}i)}{4} = \boxed{1+\sqrt{3}i = z_B}$$

$$\boxed{z_C'} = \frac{-4}{z_C-2} = \frac{-4}{\overline{z_B}-2} = \frac{-4}{\overline{z_B}-\overline{2}} = \frac{-4}{\overline{z_B-2}} = \frac{\overline{-4}}{\overline{z_B-2}} = \overline{\left(\frac{-4}{z_B-2}\right)} = \overline{z_B'} = \overline{z_B} = \boxed{1-\sqrt{3}i}$$

Rq : $z_C' = z_C$

b) $z \neq 2$ et $z' = \dfrac{-4}{z-2}$

Donc $z'-2 = \dfrac{-4}{z-2} - 2 = \dfrac{-4}{z-2} - \dfrac{2(z-2)}{z-2} = \dfrac{-4-2z+4}{z-2} = \dfrac{-2z}{z-2}$

Or deux nombres complexes égaux ont le même module, donc : $|z'-2| = \left|\dfrac{-2z}{z-2}\right| = \dfrac{|-2|\times|z|}{|z-2|}$

règles sur les Modules.

donc $\boxed{|z'-2| = \dfrac{2|z|}{|z-2|}}$

c) $M(z)$ et $M \in \mathcal{D}$: donc $|z-2| = |z|$, donc $\dfrac{|z|}{|z-2|} = 1$ (car $z \neq 2$ vu que $M \in \mathcal{D}$ et $A \notin \mathcal{D}$).

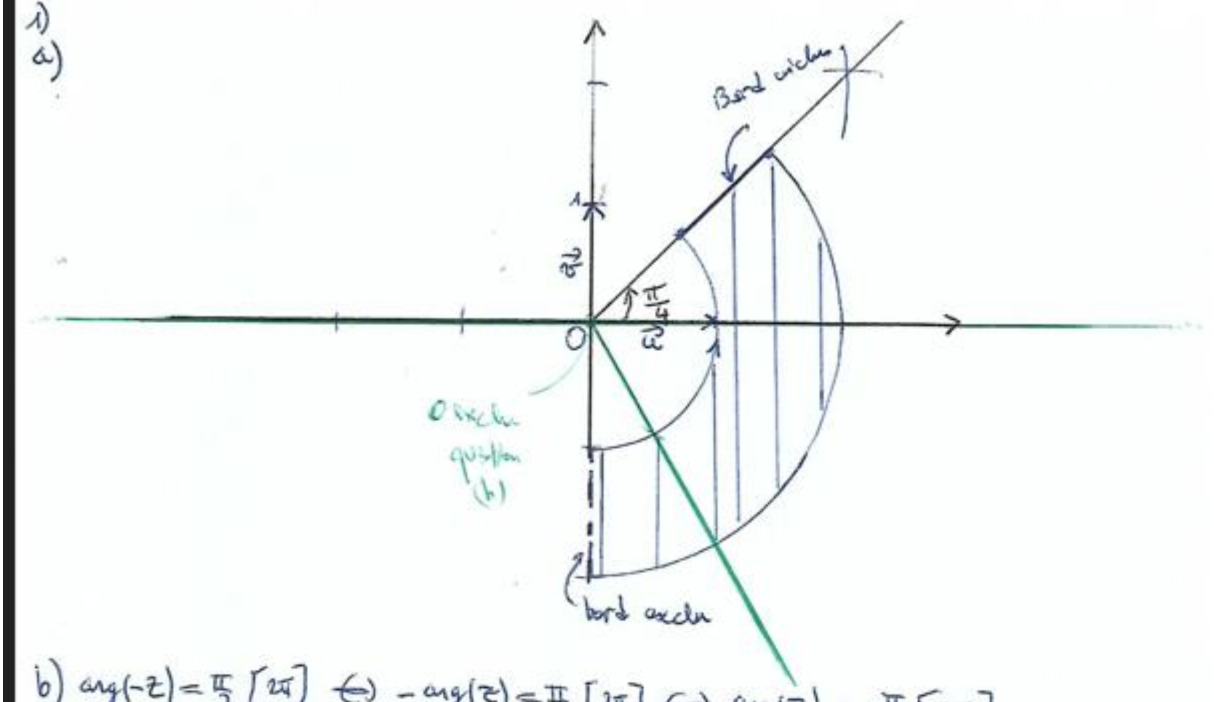
Par suite, d'après 3b) : $|z'-2| = 2\times 1 = 2$, donc $|z_{M'} - z_A| = 2$, donc $AM' = 2$ et par suite M' appartient au cercle Γ de centre A et de rayon 2.

d) $B \in \mathcal{D}$ et $C \in \mathcal{D}$ d'après q. 2a). Or $B' = B$ et $C' = C$. (d'après q. 3a)

donc d'après 3c), $B \in \Gamma$ et $C \in \Gamma$.

Exercice II

1)
a)



b) $\arg(-z)=\frac{\pi}{3}\,[2\pi] \Leftrightarrow -\arg(z)=\frac{\pi}{3}\,[2\pi] \Leftrightarrow \arg(z)=-\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

$\arg(z)=0\,[\pi] \Leftrightarrow z\in\mathbb{R}^*$

2a) $\boxed{Z}=\frac{1}{4}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{8}i}$

2b) $|Z^n|=|Z|^n$ ($n\in\mathbb{N}$).

Ainsi, $|Z^n|\leqslant 10^{-5} \Leftrightarrow |Z|^n\leqslant 10^{-5}$. D'après q. 2a), $|Z|=\frac{1}{4}$ (écriture trigo.).

$|Z^n|\leqslant 10^{-5} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n\leqslant 10^{-5} \Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)\leqslant \ln(10^{-5})$ par croissance de ln sur $]0;+\infty[$.

$|Z^n|\leqslant 10^{-5} \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1}{4}\right)\leqslant -5\ln(10) \Leftrightarrow -n\ln(4)\leqslant -5\ln(10)$

$|Z^n|\leqslant 10^{-5} \Leftrightarrow n\geqslant \frac{-5\ln(10)}{-\ln(4)}$ car $-\ln(4)<0$ $\Leftrightarrow n\geqslant\frac{5\ln(10)}{\ln(4)}$.

Avec machine : $\frac{5\ln(10)}{\ln(4)}\approx 8,3$, donc comme $n\in\mathbb{N}$, $\boxed{|Z^n|\leqslant 10^{-5} \Leftrightarrow n\geqslant 9}$.

9 est donc le plus petit entier recherché.

3) $Z'=-3\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$ ⚠ Ce n'est pas une écriture trigo. car $-3<0$.

Or $\cos(\pi+x)=-\cos(x)$ et $\sin(\pi+x)=-\sin(x)$, donc $Z'=3\left(-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$

$Z'=3\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}+\pi\right)\right)=3\left(\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)\right)$.

Or $\frac{8\pi}{7} \notin]-\pi;\pi]$. La mesure principale associée à $\frac{8\pi}{7}$ est $\frac{8\pi}{7} - 2\pi = \boxed{-\frac{6\pi}{7}}$.

Ainsi, l'écriture trigo. de Z' est : $\boxed{Z' = 3\left(\cos\left(-\frac{6\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{6\pi}{7}\right)\right)}$

Exercice III

1) $z \neq 0$ et $\boxed{z'} = \frac{-1}{\bar{z}} = \frac{-z}{z\bar{z}} = \boxed{\frac{-z}{|z|^2}}$ car $z.\bar{z} = |z|^2$.

2) $z' = z_{\overrightarrow{OM'}}$ et $z = z_{\overrightarrow{OM}}$, donc par q.1) on a : $\overrightarrow{OM'} = -\frac{1}{|z|^2}\overrightarrow{OM}$.

Or $-\frac{1}{|z|^2} \in \mathbb{R}_-^*$, donc $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires (de sens contraire) et ont O en commun.

donc $\boxed{O, M \text{ et } M' \text{ sont alignés}}$

3) M et M' sont confondus équivaut à : $z' = z$ c'est à dire : $-\frac{1}{\bar{z}} = z$, ou encore : $\underbrace{z\bar{z}}_{|z|^2 = -1} = -1$

Ainsi $\boxed{\text{M et M' sont toujours distincts}}$.

IMPOSSIBLE car $|z|^2$ est un réel positif !

4) $z \in \mathbb{U}$, donc $|z| = 1$.

D'après q.1) : $z' = \frac{-z}{|z|^2} = \frac{-z}{1^2} = -z$.

Ainsi, M' et M ont des affixes opposées, ils sont donc symétriques par rapport à l'origine O

ou encore O est le milieu de [MM']. (Si vous n'arrivez pas à le voir :

$z' = -z \iff z + z' = 0 \iff \frac{z+z'}{2} = 0$)

Exercice IV

$|z| = 1$

là encore, $|z|^2 = z.\bar{z}$!!

$|1+z|^2 + |1-z|^2 = (1+z)(\overline{1+z}) + (1-z)(\overline{1-z})$

$|1+z|^2 + |1-z|^2 = (1+z)(1+\bar{z}) + (1-z)(1-\bar{z})$ (conjugué d'une somme et $\bar{1} = 1$).

car $z\bar{z} = |z|^2 = 1^2 = 1$.

$\boxed{|1+z|^2 + |1-z|^2} = 1 + \cancel{\bar{z}} + \cancel{z} + z\bar{z} + 1 - \cancel{\bar{z}} - \cancel{z} + z\bar{z} = 2 + 2z\bar{z} = 2 + 2\times 1 = \boxed{4}$