Maths Experte Groupe 2 **Corrigé du contrôle de leçon** **Octobre 2024**

Exercice I

Merci Juliette !

1) Un entier d non nul est un diviseur d'un entier a s'il existe un entier relatif k tel que :

1 $a = kd$. Oui

2)a: Soit a et b deux entiers. On appelle combinaison linéaire de deux entiers a et b toutes expressions de la forme $au + bv$ avec u et v des entiers relatifs. Oui

1,5 Les deux combinaisons linéaires les plus célèbres sont :

- $a + b$ avec $u = 1$ et $v = 1$
- $a - b$ avec $u = 1$ et $v = -1$ Oui

b) Soit d entier non nul et a et b des entiers.

$d | a$ c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que :

$a = kd$ Oui

$d | b$ c'est-à-dire qu'il existe un entier l tel que :

$b = ld$

2,5 On a donc $au = kud$ et $bv = lvd$

On obtient donc la combinaison linéaire suivante :

$au + bv = kud + lvd$

$au + bv = (ku + lv)d$ Bien

On a : $au+bv=(ku+lv)d$

avec $(ku+lv)$ entier car $\mathbb{Z}$ est stable par multiplication et addition Oui

$au+bv=d\lambda$ avec $\lambda=(ku+lv) \to$ entier relatif

Donc d divise toute combinaison linéaire des entiers a et b. Oui

c) 7 est un diviseur de 105 car il existe un entier k tel que : $105=k\times 7$ (avec $k=15$). Oui

7 est un diviseur de 49 car il existe un entier l tel que $49=l\times 7$ (avec $l=7$). Oui

(1)

7 divise 105×2024^2 car $105\times 2024^2=7\times(15\times 2024^2)$

et 7 divise 171×49 car $171\times 49=7\times(7\times 171)$ Oui

et (15×2024^2) et (7×171) sont des entiers car $\mathbb{Z}$ stable par multiplication.

Ainsi si $7 \mid 105\times 2024^2$ et $7 \mid 171\times 49$

alors 7 divise la combinaison linéaire $105\times 2024^2+171\times 49$ Bien

d) Soit $d\in\mathbb{N}^*$ et deux entiers consécutifs :

deux entiers consécutifs s'écrivent : $2k$ et $2k+1$

un entier pair et le suivant est donc impair. Oui l'

Si $d \mid 2k$ et $d \mid 2k+1$,

on obtient $\begin{cases} d \mid 2k \\ d \mid 2k+1 \end{cases}$

Bien

$d \mid 2k+1-2k$ Oui

(0,5)

Donc $d \mid 1$

d divise 1 signifie qu'il existe un entier k tel que : $1=kd$ et $d\in\mathbb{N}^*$

Donc $d=1$ et $k=1$. Ainsi $1\times 1=1$

et d est donc égal à 1.

Exercice 2 : 2|2

1)a : Démontrons que si un entier est multiple de 6, alors cet entier est pair.

Un entier n est multiple de 6 lorsqu'il existe un entier k tel que : $n = 6k$.

On $n = 6k$

$n = 2(3k)$ Oui

1

avec $3k \in \mathbb{Z}$ car $\mathbb{Z}$ stable par multiplication.

n est donc pair car il s'écrit sous la forme $n = 2\lambda$ et $\lambda \in \mathbb{Z}$ Oui

b) La réciproque de cette affirmation est :

Si un entier est pair, alors cet entier est multiple de 6. Oui

Cet affirmation est fausse utilisons un contre-exemple :

1

4 est un entier pair car il s'écrit sous la forme $n = 2k$ ($k = 2$: $2 \times 2 = 4$).

Or 4 n'est pas un multiple de 6 : il ne peut pas s'écrire sous la forme $4 = 6 \times l$ avec l entier.

Oui

Exercice III

La contraposée de cette affirmation est : « Si un entier n est pair, alors n^5 est pair ».

Supposons n pair : il existe donc un entier k tel que : n = 2k.

Donc $n^5 = (2k)^5 = 32k^5 = 2 \times 16k^5$. Vu que $16k^5$ est entier en tant que produit d'entiers ($\mathbb{Z}$ est stable par produit), on a donc n^5 qui est pair.

Ainsi, par principe de contraposée, on a bien : (si n^5 est impair, alors n est impair) qui est démontrée.