Exercice I

1. A a trois lignes et trois colonnes, B a 3 lignes et deux colonnes, enfin C a trois lignes et une colonne (c'est un vecteur colonne à trois lignes).
2. Par exemple : $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.
3. La trace de A est égale à 1 +1 +1 = 3.
4. AB existe car le nombre de colonne de A est 3 et ce dernier est égal au nombre de lignes de B (3)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 7 & -2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

BA n'existe pas car le nombre de colonne de B (2) n'est pas égal au nombre de lignes de A (3).

AC existe car A a 3 colonnes et C a 3 lignes : $\boxed{AC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}.$

5. $E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

6.

2) $\boxed{M \times I_n \times M^{-1}} = M \times M^{-1} = \boxed{I_n}$; $\quad 2M \times (3M^{-1} - 5I_n) = 2\times 3 \times \underbrace{M \times M^{-1}}_{I_n} - 2\times 5 \times \underbrace{M \times I_n}_{M} = 6I_n - 10M$

$$(M - I_n)(2M^{-1} + 3I_n) = M \times 2M^{-1} + M \times 3I_n - I_n \times 2M^{-1} - I_n \times 3I_n = 2\underbrace{MM^{-1}}_{I_n} + 3\underbrace{MI_n}_{M} - 2I_nM^{-1} - 3I_n^2$$

$$(M - I_n)(2M^{-1} + 3I_n) = 2I_n + 3M - 2M^{-1} - 3I_n \qquad (I_n^2 = I_n).$$

$$\boxed{(M - I_n)(2M^{-1} + 3I_n) = -I_n + 3M - 2M^{-1}.}$$

Exercice II

1) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$M^2 \overset{\text{Machine}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\boxed{M^2 = O_3}$.

2) Par l'absurde, supposons M inversible :

Comme $M^2 = O_3$, en prémultipliant les deux membres de cette égalité par M^{-1}, on aurait alors,

$$\underbrace{M^{-1} \times M^2} = \underbrace{M^{-1} \times O_3}$$

$M = O_3$: ceci est absurde car M n'est pas vraiment la matrice nulle ! (aucun de ses coefficients n'est nul).

donc $\boxed{\text{M n'est pas inversible}}$.

Exercice III

$a \in \mathbb{R}^*$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$

0) $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 0 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + a \times \frac{1}{a} + a^2 \times \frac{1}{a^2} & a^2 \times \frac{1}{a} & a^2 \\ a \times \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} \times a + a \times \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \times a^2 \\ \frac{1}{a} \times \frac{1}{a} & \frac{1}{a^2} \times a & \frac{1}{a^2} \times a^2 + \frac{1}{a} \times a \end{pmatrix}$

$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} 2 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 2 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & 2 \end{pmatrix}}$; $-A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a^2 \\ -\frac{1}{a} & 0 & -a \\ -\frac{1}{a^2} & -\frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}$; $-2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1)
donc $A^2 - A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 2-0-2 & a-a & a^2-a^2 \\ \frac{1}{a}-\frac{1}{a} & 2-2 & a-a \\ \frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^2} & \frac{1}{a}-\frac{1}{a} & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Bref, $\boxed{A^2 - A - 2I_3 = O_3}$

2) D'après q.1, on a : $A^2 - A - 2I_3 = O_3$

Donc $A^2 - A = 2I_3$

Donc $\frac{A^2 - A}{2} = I_3$

donc $\frac{A(A-I)}{2} = I_3$, donc : $A \times \frac{A-I}{2} = I_3$: donc A est inversible

d'inverse $\boxed{A^{-1} = \frac{A-I}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & -1 & a \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a} & -1 \end{pmatrix}}$

Exercice IV

0) Non car $-1<0$: elle n'a pas tous ses coefficients positifs ou nuls.

1) $B = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,6 & 0,4 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont des matrices stochastiques.

2) C'est faux : en appelant B la matrice précédente, et $C = I_2$, ces deux matrices sont stochastiques d'après la question 1), pour autant : $B+C = \begin{pmatrix} 1,5 & 0,5 \\ 0,6 & 1,4 \end{pmatrix}$ n'est pas stochastique car $1,5 + 0,5 = 2$ et $2 \neq 1$.

3) $K = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$.

a) $\det(K)=0{,}2 \times 0{,}7 - 0{,}3 \times 0{,}8 = 0{,}14 - 0{,}24 = -0{,}1$.

Or, -0,1≠0, donc $\det(K) \neq 0$, et par suite K est une matrice inversible.

b) $K^{-1} = \frac{1}{\det(K)} \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}8 \\ -0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-0{,}1} \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}8 \\ -0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix} = -10 \begin{pmatrix} 0{,}7 & -0{,}8 \\ -0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

c) C'est faux comme en témoigne pour contre exemple la matrice K précédente :
K^{-1}n'estpas stochastique car certains de ses coefficients sont strictement négatifs.

4)

a) $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$.

⇒) Supposons que P est une matrice stochastique : alors tous ses coefficients sont positifs ou nuls, et :

$p_{11} + p_{12} = 1$ et $p_{21} + p_{22} = 1$. En notant X=$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a : $PX = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} + p_{12} \\ p_{21} + p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = X$.

⇐) Soit P une matrice carrée d'ordre 2 dont tous les coefficients sont positifs ou nuls et telle que PX=X, où X=$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En posant $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}$, on a bien en faisant le produit $PX = \begin{pmatrix} p_{11} + p_{12} \\ p_{21} + p_{22} \end{pmatrix}$, et l'égalité PX=X s'écrit :

$\begin{pmatrix} p_{11} + p_{12} \\ p_{21} + p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc équivaut à dire que : $p_{11} + p_{12} = 1$ et $p_{21} + p_{21} = 1$.

Vu que tous les coefficients de P sont positifs ou nuls, on a P stochastique.

Ainsi en raisonnant par double implication, on a bien prouvé l'équivalence souhaitée.

b) Soient L et M deux matrices stochastiques d'ordre 2.

- Tous les coefficients de L et M sont positifs ou nuls, et avec la règle du produit matriciel, comme des produits et sommes de nombres tous positifs ou nuls sont positifs ou nuls, tous les coefficients de LM sont positifs ou nuls.
- D'après la question précédente (sens direct) : avec $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, vu que L et M sont stochastiques, on a : LX=X et MX=X. Par suite, LMX=L(MX)=LX=X, et d'après la question précédente (sens indirect), on a bien que LM est une matrice stochastique d'ordre 2.