Exercice I

Exercice I :

29 page 53 : $z_A = 4+2i$; $z_B = -2+i$; $z_C = -3+5i$

$\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

a) $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = -2+i-(4+2i)$

$\boxed{z_{\overrightarrow{AB}} = -6-i}$

$z_{\overrightarrow{AC}} = z_C - z_A = -3+5i-(4+2i)$

$\boxed{z_{\overrightarrow{AC}} = -7+3i}$

b) On a : $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

Donc : $z_{\overrightarrow{AM}} = 3z_{\overrightarrow{AB}} + 2z_{\overrightarrow{AC}}$

Or, $z_{\overrightarrow{AB}} = -6-i$ et $z_{\overrightarrow{AC}} = -7+3i$ (q-a).

Donc : $z_{\overrightarrow{AM}} = 3(-6-i)+2(-7+3i)$

$z_{\overrightarrow{AM}} = -18-3i-14+6i$

$\boxed{z_{\overrightarrow{AM}} = -32+3i}$

c) On a : $z_{\overrightarrow{AM}} = z_M - z_A$.

Or, $z_{\overrightarrow{AM}} = -32+3i$ et $z_A = -6-i$

Donc : $-32+3i = z_M - (-6-i)$

$\Leftrightarrow \boxed{z_M = -38+2i}$

45 page 53

a) $|z_1| = |(\sqrt{3}+i)^{10}| = |(\sqrt{3}+i)|^{10} = (\sqrt{3+1})^{10} = 2^{10} = 1024$

$\boxed{|z_1| = 1024}$

47 page 53 :

a) $z_1 = (5+2i)(\sqrt{3}+i\sqrt{6})$

$|z_1| = |(5+2i)(\sqrt{3}+i\sqrt{6})| = |5+2i|\,|\sqrt{3}+i\sqrt{6}| = \sqrt{25+4}\,\sqrt{3+6}$

$\boxed{|z_1| = 3\sqrt{29}}$

b) $z_2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{4i}\right)^3$

$|z_2| = \left|\left(\dfrac{\sqrt{3}-i}{4i}\right)^3\right| = \left(\dfrac{|\sqrt{3}-i|}{|4i|}\right)^3 = \left(\dfrac{\sqrt{3+1}}{4}\right)^3 = \dfrac{1}{2^3}$

$\boxed{|z_2| = \dfrac{1}{8}}$

46 page 53 :

b) $z_2 = \dfrac{66+77i}{66-77i}$

$|z_2| = \left|\dfrac{66+77i}{\overline{66+77i}}\right| = \dfrac{|66+77i|}{|66+77i|}$ car : $\forall z \in \mathbb{C}\ |\bar{z}| = |z|$

$\boxed{|z_2| = 1}$

52 page 55 : $z_I = 1,8 - 3,5i$; $z_A = -1,8 + 1,3i$

a) $z_{\vec{IA}} = z_A - z_I = -1,8 + 1,3i - (1,8 - 3,5i)$

$\boxed{z_{\vec{IA}} = -3,6 + 4,8i}$

b) Le rayon du cercle $\mathcal{C}$ de centre I passant par A est la distance IA

$IA = |z_A - z_I| = |z_{\vec{IA}}| = |-3,6 + 4,8i| = \sqrt{12,96 + 23,04}$

$\boxed{IA = 6}$

Le rayon de $\mathcal{C}$ est donc égal à 6.

c) Calculons la distance IM.

$IM = |z_M - z_I| = |5,4 + 1,3i - 1,8 + 3,5i| = |3,6 + 4,8i| = IA = 6$

$\boxed{IM = 6}$

Donc le point M appartient à $\mathcal{C}$ car sa distance au centre est celle du rayon de $\mathcal{C}$.

55 page 55 : $z_A = 2 + 5i$; $z_B = -3i$

a) $z_{\vec{AM}} = z - z_A$ $\quad\quad$ $z_{\vec{BM}} = z - z_B$

$\boxed{z_{\vec{AM}} = z - 2 - 5i}$ $\quad\quad$ $\boxed{z_{\vec{BM}} = z + 3i}$

b) $|z - 2 - 5i| = |z + 3i| \Leftrightarrow |z_{\vec{AM}}| = |z_{\vec{BM}}| \Leftrightarrow \boxed{AM = BM}$

Ainsi, l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M dont l'affixe vérifie : $|z-2-5i| = |z+3i|$ est la médiatrice du segment [AB]

60 page 55 :

a) $z_1 = -4i$

- $|z_1| = |-4| = \boxed{4}$
- Soit θ_1 tel que : $\theta_1 = \arg(z_1)$ $[2\pi]$

Donc : $\begin{cases} \cos\theta_1 = 0 \\ \sin\theta_1 = \frac{-4}{4} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\theta_1 = -\frac{\pi}{2}}$

$\boxed{z_1 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}$

63c) p.55

$$\boxed{z} = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = \boxed{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

64p55

1)a) $z = 1+i$ $\quad |z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ et si θ est un argument de z, $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$, donc $\frac{\pi}{4}$ est un argument de z.

b) Très similaire : ici $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$, donc $\theta = -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$: $-\frac{2\pi}{3}$ est ici un argument de z.

2) Pour le a) : $\arg(\bar{z}) = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$; $\arg(-z) = \frac{\pi}{4} + \pi\ [2\pi] = -\frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$.

$\arg(4z) = \arg(z) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

Pour le b) : $\arg(\bar{z}) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$; $\arg(-z) = -\frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$; $\arg(4z) = -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

66 p.56 $\quad z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$

a) Car pas de la forme : $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

b) $z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right)$ car $\begin{cases} \cos \text{ est paire sur } \mathbb{R} \text{ (i.e. } \forall x \in \mathbb{R},\ \cos(-x) = \cos(x)) \\ \sin \text{ est impaire sur } \mathbb{R} \text{ (i.e. } \forall x \in \mathbb{R},\ \sin(-x) = -\sin(x)) \end{cases}$.

Forme trigo. de z.

75b.p56

$\arg(z) = \pi\ [2\pi]$ désigne sur l'axe des réels l'intervalle $]-\infty ; 0[$.

$\{M(z),\ |z| \geq 2\}$ est l'extérieur ainsi que le cercle de centre O et de rayon $R = 2$.

donc $\{M(z) \ /\ |z| \geq 2 \text{ et } \arg(z) = \pi\ [2\pi]\}$ est l'intervalle $]-\infty ; -2]$ de l'axe des réels. (représentation évidente).

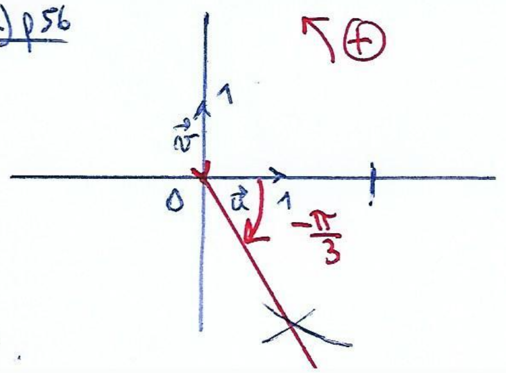
76p56

a) $\{M(z),\ |z| \leq 2 \text{ et } \arg(z) \in [0 ; \frac{\pi}{2}]\} \cup \{O\}$.

b) $\{M(z),\ 1 \leq |z| \leq 2 \text{ et } \arg(z) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]\}$.

(!) La notion d'argument n'inclut pas O qui lui est dans la zone coloriée en bleu.

77a) p56



79p56 $\quad \arg(z+i) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $\arg(z+i) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

signifie que $z+i$ est imaginaire pur non nul.

$\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$, $z + i = \lambda i$, donc $z = (\lambda - 1)i$

avec $\lambda - 1 \neq 0$, donc l'ensemble à dessiner est ici l'axe des imaginaires purs privé du point O.

<u>Facultatif</u> :109 *page* 63

z est un nombre complexe de module égal à 1, n est un entier naturel tel que $z^{2n} \neq -1$.

Enfin, $Z = \frac{z^n}{1+z^{2n}}$.

Pour montrer que Z est réel, prouvons par exemple que : $\bar{Z} = Z$.

Calculons donc $\bar{Z}$:

$$\bar{Z} = \overline{\frac{z^n}{1+z^{2n}}} = \frac{\overline{z^n}}{1+\overline{z^{2n}}} = \frac{\bar{z}^n}{1+\bar{z}^{2n}}$$

Or, $|z| = 1$ donc : $|z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$

Donc : $\bar{Z} = \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{z}\right)^{2n}} = \frac{\frac{1}{z^n}}{1+\frac{1}{z^{2n}}} = \frac{\frac{1}{z^n}}{\frac{z^{2n}+1}{z^{2n}}} = \frac{1}{z^n} \times \frac{z^{2n}}{1+z^{2n}} = \frac{z^n}{1+z^{2n}}$

Ainsi : $\boxed{\bar{Z} = Z}$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{C}$, $\boxed{\frac{z^n}{1+z^{2n}} \in \mathbb{R}}$ avec : $z^{2n} \neq -1$.

Exercice I

100 ***page*** **61**

$\mathcal{E}=\{M(z) \,/\, z\neq 0 \,;\, z\neq 1$ et $z\neq -1\}$. Rappel : $\vec{u}$ a pour affixe 1.

$M(z)\in\mathcal{E}$; $N(z^2)$ et $P(z^3)$.

1) Par l'absurde : si au moins deux points étaient confondus, on aurait :

$\underbrace{z=z^2}$ ou $\underbrace{z=z^3}$ ou $\underbrace{z^2=z^3}$

$\underbrace{z(1-z)=0}$ ou $z(1-z^2)=0$ ou $z^2(1-z)=0$

$(z=0$ ou $z=1)$ ou $(z=0$ ou $z=-1$ ou $z=1)$ ou $(z=0$ ou $z=1)$, bref $M(z)\notin\mathcal{E}$; absurde.

donc M, N et P sont deux à deux distincts.

2a) $z_{\vec{MN}} = z_N - z_M = z^2 - z$

$z_{\vec{MP}} = z_P - z_M = z^3 - z$

$z_{\vec{NP}} = z_P - z_N = z^3 - z^2$.

2b) MNP est rectangle en P équivaut à : $MN^2 = MP^2 + NP^2$

Or, : $MN^2 = \|\vec{MN}\|^2 = |z^2-z|^2$; $MP^2 = \|\vec{MP}\|^2 = |z^3-z|^2$ et $NP^2 = \|\vec{NP}\|^2 = |z^3-z^2|^2$.

Par suite, MNP est rectangle en P équivaut à : $|z^2-z|^2 = |z^3-z|^2 + |z^3-z^2|^2$

D'après 1) $z^2-z\neq 0$, donc $|z^2-z|\neq 0$, donc $|z^2-z|^2\neq 0$ et par suite,

$$\frac{|z^2-z|^2}{|z^2-z|^2} = \frac{|z^3-z|^2+|z^3-z^2|^2}{|z^2-z|^2}$$

$$1 = \frac{|z(z^2-1)|^2 + |z^2(z-1)|^2}{|z(z-1)|^2} = \frac{|z(z+1)(z-1)|^2}{|z(z-1)|^2} + \frac{|z^2(z-1)|^2}{|z(z-1)|^2}$$

$$1 = \left|\frac{\cancel{z}(z+1)\cancel{(z-1)}}{\cancel{z}\cancel{(z-1)}}\right|^2 + \left|\frac{z^{\cancel{2}}\cancel{(z-1)}}{\cancel{z}\cancel{(z-1)}}\right|^2 = |z+1|^2 + |z|^2.$$

Ainsi on a bien : MNP rectangle en P équivaut à : $|z+1|^2+|z|^2=1$.

c) $|z+1|^2+|z|^2=1 \iff (z+1)(\overline{z+1})+z\overline{z}=1$ car $|z|^2=z\overline{z}$.

$|z+1|^2+|z|^2=1 \iff (z+1)(\overline{z}+1)+z\overline{z}=1$ car $\overline{1}=1$ et $\overline{z+1}=\overline{z}+\overline{1}=\overline{z}+1$

$|z+1|^2+|z|^2=1 \iff z\overline{z}+z+\overline{z}+1+z\overline{z}=1$

$|z+1|^2+|z|^2=1 \iff 2z\overline{z}+2Re(z)=0$

$|z+1|^2+|z|^2=1 \iff z\overline{z}+Re(z)=0 \quad \div 2$

$|z+1|^2+|z|^2=1 \iff z\overline{z}+\frac{1}{2}(z+\overline{z})=0$

$|z+1|^2+|z|^2=1 \iff z\overline{z}+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z}=0$

$|z+1|^2+|z|^2=1 \iff z\overline{z}+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z}+\frac{1}{4}=0+\frac{1}{4}$

$|z+1|^2+|z|^2=1 \iff \underbrace{z\overline{z}+\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}\overline{z}+\frac{1}{4}}_{\text{factorisation}}=\frac{1}{4}$

$|z+1|^2+|z|^2=1 \iff (z+\frac{1}{2})(\overline{z}+\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$

$\boxed{|z+1|^2+|z|^2=1 \iff (z+\frac{1}{2})(\overline{z+\frac{1}{2}})=\frac{1}{4}}$ car $\overline{z}+\frac{1}{2}=\overline{z}+\overline{\frac{1}{2}}=\overline{(z+\frac{1}{2})}$

d) Grâce à 2b) et 2c), MNP est rectangle en P avec $M(z)\in\mathcal{E}$ équivaut à : $(z+\frac{1}{2})(\overline{z+\frac{1}{2}})=\frac{1}{4}$

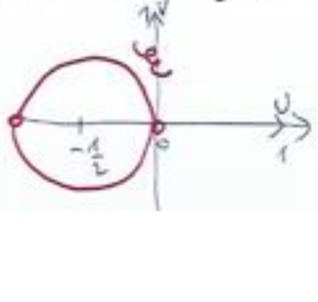
c'est-à-dire à $|z+\frac{1}{2}|^2=\frac{1}{4}$ vu que $z\overline{z}=|z|^2$!

Par positivité du module, cela revient encore à dire que $|z+\frac{1}{2}|=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$, donc à $|z_M-(-\frac{1}{2})|=\frac{1}{2}$

M appartient donc au cercle de centre $\Omega(-\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé des points W et O

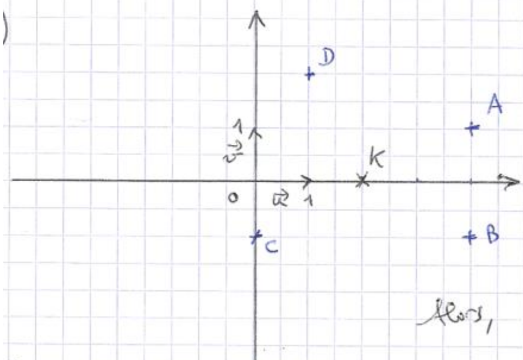
car $|-1+\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$ et $|0+\frac{1}{2}|=\frac{1}{2}$

$\boxed{\mathcal{E}=\partial\mathcal{C}(\Omega;\frac{1}{2})-\{W;O\}}$



Exercice II)

0) et 1)



2) Conjecture : Visiblement, ABC est rectangle en B, donc le centre de son cercle circonscrit est K = Milieu de [AC].

Soit K = Milieu de [AC].

Alors, $z_K = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{4+i+(-i)}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Prouvons que A, B, C et D sont situé sur même cercle de centre K.

$AC = |z_C - z_A| = |-i-(4+i)| = |-i-4-i| = |-4-2i| = \sqrt{(-4)^2+(-2)^2} = \sqrt{20}$.

donc $KA = KC = \frac{\sqrt{20}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$.

$KB = |z_B - z_K| = |4-i-2| = |2-i| = \sqrt{2^2+(-1)^2} = \sqrt{5}$.

$KD = |z_D - z_K| = |1+2i-2| = |-1+2i| = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$.

Bref, $KA = KB = KC = KD = \sqrt{5}$, donc A, B, C, D sont situés sur le même cercle de centre $K(2)$ et de rayon $R = \sqrt{5}$.

3) $z \neq 2$, $M(z)$ et $M'(z')$ avec $z' = \frac{iz+10-2i}{z-2}$.

a) $z_{A'} = \frac{iz_A+10-2i}{z_A-2} = \frac{i(4+i)+10-2i}{4+i-2} = \frac{4i+i^2+10-2i}{2+i} = \frac{9+2i}{2+i}$

$\boxed{z_{A'}} = \frac{(9+2i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{18-9i+4i-2i^2}{2^2+1^2} = \frac{18-5i+2}{5} = \frac{20-5i}{5} = \boxed{4-i}$

Rq : A' = B.

$z_{B'} = \frac{iz_B+10-2i}{z_B-2} = \frac{i(4-i)+10-2i}{4-i-2} = \frac{4i-i^2+10-2i}{2-i} = \frac{11+2i}{2-i}$

$\boxed{z_{B'}} = \frac{(11+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{22+2i^2+11i+4i}{5} = \frac{20+15i}{5} = \boxed{4+3i}$

$z_{C'} = \frac{i(-i)+10-2i}{-i-2} = \frac{1+10-2i}{-2-i} = \frac{11-2i}{-2-i} = \frac{(11-2i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \frac{-20+15i}{5}$

$\boxed{z_{C'}} = \boxed{-4+3i}$

3b) $P(i)$

$$\begin{cases} A'P = |z_{A'} - z_P| = |4-i-i| = |4-2i| = \sqrt{4^2+(-2)^2} = \sqrt{20} \\ B'P = |z_{B'} - z_P| = |4+3i-i| = |4+2i| = \sqrt{20} \quad (4+2i = \overline{4-2i}) \\ C'P = |z_{C'} - z_P| = |-4+3i-i| = |-4+2i| = \sqrt{(-4)^2+2^2} = \sqrt{20}. \end{cases}$$

Donc A', B' et C' sont situés sur le même cercle de centre $P(i)$ et de rayon $R = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

3c) $|z'-i| = \left|\frac{iz+10-2i}{z-2} - i\right| = \left|\frac{iz+10-2i-i(z-2)}{z-2}\right|$

$|z'-i| = \left|\frac{\cancel{iz}+10-\cancel{2i}-\cancel{iz}+\cancel{2i}}{z-2}\right| = \left|\frac{10}{z-2}\right| = \frac{10}{|z-2|}$

d) $M(z) \in \mathscr{C}$: donc $|z-2| = \sqrt{5}$ car $MK = R = \sqrt{5}$.

d'où $|z'-i| \overset{3c}{=} \frac{10}{|z-2|} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$.

2) Si $M(z) \in \mathcal{C}$, alors $M'(z')$ vérifie, d'après la question précédente : $|z'-i| = 2\sqrt{5}$.

Donc $|z_{M'} - z_P| = 2\sqrt{5}$, par suite, $M'P = 2\sqrt{5}$ et donc le point M' appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de centre $P(i)$ et de rayon $R = 2\sqrt{5}$.

On a donc établi que $f(\mathcal{C}) \underset{\text{inclus dans}}{\subset} \mathcal{C}'$.

Exercice III

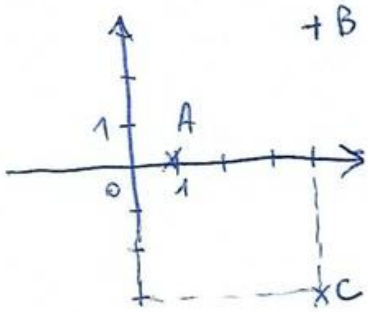
(E) :

$$(z-1)(-z^2+8z-25)=0 \iff \begin{cases} z=1 \\ \text{ou} \\ -z^2+8z-25=0 \rightarrow \text{équation du 2}^{\text{e}} \text{ degré avec } \begin{cases} a=-1 \\ b=8 \\ c=-25 \end{cases} \end{cases}$$

$\Delta = b^2-4ac = 8^2-4\times(-1)\times(-25) = 64-100 = -36$.

$\Delta < 0$, donc deux racines : $z_1 = \dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{-8-6i}{-2} = 4+3i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 4-3i$

donc $\boxed{\mathcal{S}_{(E)} = \{1 ; 4+3i ; 4-3i\}}$.



Soit $A(1)$; $B(4+3i)$ et $C(4-3i)$: Faisons un croquis :

Conjecture : ABC semble être rectangle en A.

Preuve : Méthode 1 (avec le produit scalaire).

$z_{\vec{AB}} = z_B - z_A = 4+3i-1 = 3+3i$, donc $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$

$z_{\vec{AC}} = z_C - z_A = 4-3i-1 = 3-3i$, donc $\vec{AC}\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}$

Par suite, $\vec{AB}.\vec{AC} = xx'+yy' = 3\times3+3\times(-3) = 9-9 = 0$, donc $\vec{AB} \perp \vec{AC}$, donc $(AB)\perp(AC)$ et ABC est un triangle rectangle en A ; la proposition ② est VRAIE

Méthode 2 : Avec la réciproque du théorème de Pythagore (

$AB = |z_B - z_A| = |3+3i| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18}$

$AC = |z_C - z_A| = |3-3i| = |\overline{3+3i}| = |3+3i| = \sqrt{18}$

$BC = |z_C - z_B| = |4-3i-(4+3i)| = |-6i| = 6$

D'une part : $BC^2 = 6^2 = 36$

D'autre part : $AB^2 + AC^2 = \sqrt{18}^2 + \sqrt{18}^2 = 18 + 18 = 36$.

Ainsi : $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Donc d'après la réciproque du th. de Pythagore ABC est rectangle en A (et aussi isocèle en A).

La proposition (2) est vraie —

Exercice IV

1) $a \in \mathbb{C}^*$; $b \in \mathbb{C}^*$

*) $\frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{a^2+2ab+b^2}{ab} = \frac{a^2}{ab} + \frac{2ab}{ab} + \frac{b^2}{ab} = \frac{a}{b} + 2 + \frac{b}{a}$.

Or $|a| = |b|$, donc comme $b \in \mathbb{C}^*$, $|b| \neq 0$, donc $\frac{|a|}{|b|} = 1$, donc $\left|\frac{a}{b}\right| = 1$.

Par suite, $\frac{a}{b} \in \mathbb{U}$, donc $\frac{b}{a} \in \mathbb{U}$ car $\mathbb{U}$ est stable par inverse (cf. cours).

Aussi, par définition de $\mathbb{U}$, $\frac{a}{b} \times \overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = 1$ donc $\overline{\left(\frac{a}{b}\right)}$ est l'inverse de $\frac{a}{b}$, donc $\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{b}{a}$

Par suite, $\boxed{\frac{(a+b)^2}{ab}} = 2 + \frac{a}{b} + \overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \boxed{2 + 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{b}\right)}$ car $\forall z \in \mathbb{C}$, $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$.

donc $\boxed{\frac{(a+b)^2}{ab} \in \mathbb{R}}$ (somme de deux réels).

**) Si $|a| = |b| = 1$: alors $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} = \frac{1}{1} = 1$.

Or (cf. cours), $\forall z \in \mathbb{C}$, *** $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$, donc $\left|\mathrm{Re}\left(\frac{a}{b}\right)\right| \leq \left|\frac{a}{b}\right|$, donc $\left|\mathrm{Re}\left(\frac{a}{b}\right)\right| \leq 1$.

Par suite, $-1 \leq \mathrm{Re}\left(\frac{a}{b}\right) \leq 1$, donc $-2 \leq 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{b}\right) \leq 2$, donc $2 + 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{b}\right) \geq 0$.

d'après (*), $\frac{(a+b)^2}{ab} = 2 + 2\mathrm{Re}\left(\frac{a}{b}\right)$, donc $\boxed{\frac{(a+b)^2}{ab} \geq 0}$

*** Preuve : Si $z = x + yi$ avec x, y réels, $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ et $x = \mathrm{Re}(z)$.

Or $x^2 + y^2 \geq x^2$, donc par croissance de $\sqrt{\ }$ sur $\mathbb{R}_+$, $\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2}$ et $\sqrt{x^2} = |x|$ (valeur absolue de x).

Donc $|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$.

2) $z \neq 0$ pour que $\frac{1}{z}$ existe. caractérisation des réels à l'aide du conjugué.

$\left(z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\right) \Longleftrightarrow \left(z + \frac{1}{z} = \overline{z + \frac{1}{z}}\right) \Longleftrightarrow \left(z + \frac{1}{z} = \bar{z} + \frac{1}{\bar{z}}\right)$ par propriété du conjugué

$\left(z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\right) \Longleftrightarrow \left(z - \bar{z} = \frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}\right) \Longleftrightarrow \left(z - \bar{z} = \frac{z - \bar{z}}{z\bar{z}}\right) \Longleftrightarrow \left(z - \bar{z} = \frac{z - \bar{z}}{|z|^2}\right)$

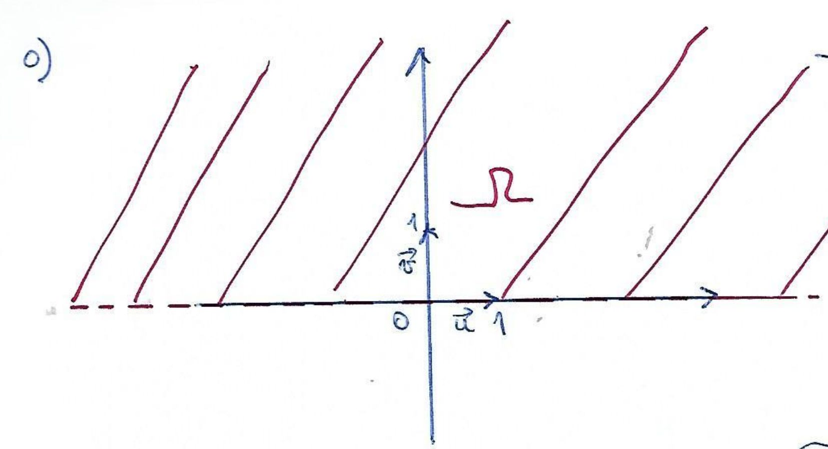
$\left(z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\right) \Longleftrightarrow (z - \bar{z})\left(1 - \frac{1}{|z|^2}\right) = 0 \overset{\text{produit nul}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} z = \bar{z} \\ z \neq 0 \end{cases}$ ou $1 - \frac{1}{|z|^2} = 0$

$\left(z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} z = \bar{z} \\ z \neq 0 \end{cases}$ ou $|z|^2 = 1$ (or par positivité du module, $|z| = 1$).

Ainsi, $\boxed{\left(z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}\right) \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}^* \text{ ou } |z| = 1}$ ($z = \bar{z}$ caractérise les réels).

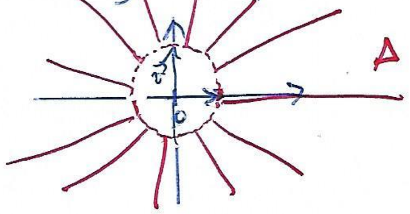
Exercice V

0)



Ω est le demi-plan situé au-dessus de l'axe des réels (privé de l'axe des réels).

$\Delta = \{z \in \mathbb{C},\ |z| > 1\}$ est le plan entier privé du $\underbrace{\text{disque de centre } O \text{ et de rayon } 1}^{\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\leq 1\}}$.



a) $z \in \Omega \setminus \{2i\}$, donc $\mathrm{Im}(z) > 0$ et $z \neq 2i$

Posons $z = a + ib$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$ et $(a\,;b) \neq (0\,;2)$;

$$\left|\frac{z+2i}{z-2i}\right| = \left|\frac{a+(b+2)i}{a+(b-2)i}\right| = \frac{|a+(b+2)i|}{|a+(b-2)i|} = \frac{\sqrt{a^2+(b+2)^2}}{\sqrt{a^2+(b-2)^2}}$$

Montrons que si $b>0$, alors $a^2+(b+2)^2 > a^2+(b-2)^2$:

Or $a^2+(b+2)^2 = a^2+b^2+4+4b$ et $a^2+(b-2)^2 = a^2+b^2+4-4b$.

Vu que $b>0$, $b>-b$, donc $4b>-4b$, donc $\underbrace{a^2+b^2+4+4b}_{} > \underbrace{a^2+b^2+4-4b}_{}$ car $b\neq 2$

Donc $a^2+(b+2)^2 > a^2+(b-2)^2 > 0$

Par stricte croissance de $\sqrt{\ }$ sur $\mathbb{R}_+$, on a : $\sqrt{a^2+(b+2)^2} > \sqrt{a^2+(b-2)^2} > 0$

Donc $$\frac{\sqrt{a^2+(b+2)^2}}{\sqrt{a^2+(b-2)^2}} > 1$$

donc $\left|\frac{z+2i}{z-2i}\right| > 1$, donc $\boxed{\frac{z+2i}{z-2i} \in \Delta.}$

b) $f : \begin{cases} \Omega \setminus \{2i\} \longrightarrow \Delta \\ z \longmapsto f(z) = \dfrac{z+2i}{z-2i} \end{cases}$

Soit $b \in \Delta$: $f(z) = b \iff \dfrac{z+2i}{z-2i} = b$ et $z \neq 2i$.

$f(z) = b \iff z + 2i = b(z-2i)$ et $z \neq 2i$.

$f(z) = b \iff z + 2i = bz - 2bi$ et $z \neq 2i$

$f(z) = b \iff z(1-b) = -2i - 2bi = -2i(b+1)$ et $z \neq 2i$.

$f(z) = b \iff z = \dfrac{-2i(b+1)}{1-b} = \dfrac{2(b+1)i}{b-1}$

$b \neq 1$ car $b \in \Delta$, donc $\mathrm{Im}(b) > 0$ et si $b = 1$, $\mathrm{Im}(b) = 0$: absurde.

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{2(b+1)}{b-1} i \right\}.}$$

c) Montrons que $\mathrm{Im}\left(\dfrac{2(b+1)}{b-1} i \right) > 0$ sachant que $b \in \Delta$, donc $|b| > 1$:

Or, $\dfrac{2(b+1)i}{b-1} = \dfrac{2(b+1)(\overline{b-1})i}{(b-1)(\overline{b-1})} = \dfrac{2(b+1)(\bar{b} - \bar{1})i}{|b-1|^2} = \dfrac{2(b+1)(\bar{b}-1)i}{|b-1|^2}$

$$\frac{2(b+1)i}{b-1} = \frac{2i}{|b-1|^2} \times (b\bar{b} - b + \bar{b} - 1) = \frac{2i}{|b-1|^2}(|b|^2 - 1 + \bar{b} - b)$$

Or $|b| > 1$, donc $|b|^2 > 1^2$ donc $|b|^2 - 1 > 0$ et $\bar{b} - b = -2i\,\mathrm{Im}(b)$

alors $\dfrac{2(b+1)i}{b-1} = \dfrac{2i}{|b-1|^2}(|b|^2 - 1 - 2i\,\mathrm{Im}(b)) = \dfrac{4\,\mathrm{Im}(b)}{|b-1|^2} + \dfrac{2(|b|^2-1)}{|b-1|^2} i$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Im}\left(\dfrac{2(b+1)i}{b-1}\right) = \dfrac{2(|b|^2-1)}{|b-1|^2}}$ avec $\begin{cases} |b|^2 - 1 > 0 \text{ car } |b| > 1. \\ 2 > 0 \\ |b-1|^2 > 0. \end{cases}$

Ainsi (produit et quotient de réels > 0) on a : $\mathrm{Im}\left(\dfrac{2(b+1)i}{b-1}\right) > 0$, donc

$\boxed{\dfrac{2(b+1)i}{b-1} \in \Omega}$ et de plus, si $\dfrac{2(b+1)}{b-1} = 2i$, alors $\dfrac{b+1}{b-1} = i$

Donc $b+1 = i(b-1)$ $(b \neq 1$ car $|b|>1)$.

$b+1 = ib - i$

$b(1-i) = -1-i$

$$b = \frac{-1-i}{1-i} = \frac{(-1-i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-(1+i)^2}{2} = \frac{-(1+2i-1)}{2} = -i$$

et $|b| = |-i| = 1$: absurde car $b \in \Delta$, donc $|b|>1$.

Ainsi $\omega \in \Omega$ et $z \neq 2i$, donc $\underline{\overline{\omega \in \Omega \setminus \{2i\}}}$. où $\omega = \frac{2(b+1)}{b-1} i$

d) L'axe des imaginaires purs privé du point d'affixe $2i$ peut être vu comme l'ensemble suivant :

$\Gamma = \{ki, \ k \in \mathbb{R} - \{2\}\}$.

Soit $k \in \mathbb{R} - \{2\}$: Calculons $f(ki)$:

$$f(ki) = \frac{ki+2i}{ki-2i} = \frac{(k+2)i}{(k-2)i} = \frac{k+2}{k-2} \quad \text{avec} \quad \frac{k+2}{k-2} \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $f(\Gamma) \subset \mathbb{R}$. L'étude des variations de $\gamma : \mathbb{R}\setminus\{2\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \gamma(x) = \frac{x+2}{x-2}$ montre que les valeurs prises par γ appartiennent à $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ainsi, $\boxed{f(\Gamma) \subset \mathbb{R}\setminus\{1\}}$

Réciproquement, soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$. $f(z) = x \iff \frac{z+2i}{z-2i} = x \iff z+2i = (z-2i)x$ et $z \neq 2i$

$$\begin{aligned} f(z) = x &\iff z+2i = xz - 2xi \text{ et } z \neq 2i \\ &\iff z(1-x) = -2i - 2xi = -2i(x+1) \\ &\iff z = \frac{-2i(x+1)}{1-x} = \frac{2(x+1)}{x-1} i \end{aligned}$$

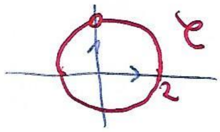
, donc $\underline{z \in \Gamma}$ et $\mathbb{R}\setminus\{1\} \subset f(\Gamma)$.

$\frac{2(x+1)}{x-1} \neq 2$ sinon $\frac{x+1}{x-1} = 1$ et $-1 = 1$ absurde.

Ainsi, $\boxed{f(\Gamma) = \mathbb{R}\setminus\{1\}}$.

H : pour la réciproque, sans refaire le calcul, on aurait pu utiliser $\underline{q\,b)}$!

e) Soit $\mathcal{C} = \{ z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\} \,/\, |z| = 2 \}$.



Soit $M(z) \in \mathcal{C}$: $|z| = 2$ et $z \neq 2i$

Considérons $f(z) = \dfrac{z+2i}{z-2i}$

$2 \in \mathcal{C}$ et $f(2) = \dfrac{2+2i}{2-2i} = \dfrac{2(1+i)}{2(1-i)} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1+2i-1}{2} = i$

$-2 \in \mathcal{C}$ et $f(-2) = \dfrac{-2+2i}{-2-2i} = \dfrac{-1+i}{-1-i} = \dfrac{(-1+i)(-1+i)}{2} = \dfrac{1-i-i-1}{2} = -i$

$-2i \in \mathcal{C}$ et $f(-2i) = 0$

Ces quelques calculs d'image par f d'éléments de $\mathcal{C}$ permettent de conjecturer que $f(\mathcal{C}) \subset i\mathbb{R}$.

Soit z tel que : $|z| = 2$ et $z \neq 2i$. Montrons $f(z) \in i\mathbb{R}$ en prouvant par exemple que $\mathrm{Re}(f(z)) = 0$.

Or $f(z) = \dfrac{z+2i}{z-2i} = \dfrac{(z+2i)(\bar{z}+2i)}{(z-2i)(\bar{z}+2i)}$ (!) $\overline{z-2i} = \bar{z} - \overline{2i} = \bar{z} + 2i$

$$f(z) = \frac{z\bar{z} + 2i(z+\bar{z}) - 4}{|z-2i|^2} = \frac{|z|^2 - 4 + 2i(z+\bar{z})}{|z-2i|^2} = \frac{2i(z+\bar{z})}{|z-2i|^2}$$

car $|z| = 2$ donc $|z|^2 - 4 = 0$

$$f(z) = \frac{2i \times 2\mathrm{Re}(z)}{|z-2i|^2} = \frac{4\mathrm{Re}(z)i}{|z-2i|^2}$$

: Ainsi $f(z) \in i\mathbb{R}$

et $\boxed{f(\mathcal{C}) \subset i\mathbb{R}}$

$z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}(z)$