Exercice I

$a \in \mathbb{R}$ et $M = \begin{pmatrix} a+1 & a^2-1 \\ -1 & -a-1 \end{pmatrix}$.

M est inversible équivaut à $\det(M) \neq 0$.

or $\det(M) = \begin{vmatrix} a+1 & a^2-1 \\ -1 & -a-1 \end{vmatrix} = (a+1)(-a-1) - (-1)(a^2-1)$

$\det(M) = -(a+1)^2 + a^2 - 1 = -(a^2+2a+1) + a^2 - 1 = -2a-2 = -2(a+1)$.

Ainsi, $(\det(M) \neq 0) \Longleftrightarrow a \neq -1$.

$\boxed{\forall a \in \mathbb{R} - \{-1\},\ M \text{ est inversible}}$.

Exercice II

48 $P_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ donc $P_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$.

or $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}2a_n + 0{,}4b_n \\ b_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}6b_n \end{cases}$ s'écrit matriciellement : $P_{n+1} = AP_n$, où $\boxed{A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = AP_n$ avec $\boxed{P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}}$

55a (S) $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x+3y-2z=2 \\ 4x-y+2z=8 \end{cases}$. Posons : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

et $B = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

(S) s'écrit matriciellement sous la forme : $\boxed{AX = B}$.

A l'aide de sa machine, on vérifie que A est inversible et que A^{-1} = horrible...

Donc de $AX = B$, on tire en prémultipliant à gauche par A^{-1} :

$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

D'où $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $x=1 ; y=2 ; z=3$. $\boxed{\mathcal{S} = \{(1;2;3)\}}$.

79 page 243

a)

$M=(m_{ij})_{\substack{1\le i\le 5\\ 1\le j\le 5}}$ avec $m_{ij}\in\{0;1\}$.

$$TM=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m_{11}&m_{12}&m_{13}&m_{14}&m_{15}\\m_{21}&m_{22}&m_{23}&m_{24}&m_{25}\\m_{31}&m_{32}&m_{33}&m_{34}&m_{35}\\m_{41}&m_{42}&m_{43}&m_{44}&m_{45}\\m_{51}&m_{52}&m_{53}&m_{54}&m_{55}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m_{21}&m_{22}&m_{23}&m_{24}&m_{25}\\m_{31}&m_{32}&m_{33}&m_{34}&m_{35}\\m_{41}&m_{42}&m_{43}&m_{44}&m_{45}\\m_{51}&m_{52}&m_{53}&m_{54}&m_{55}\\m_{11}&m_{12}&m_{13}&m_{14}&m_{15}\end{pmatrix}$$

Ainsi
- la ligne 1 de TM est la ligne 2 de M
- la ligne 2 de TM est la ligne 3 de M
- la ligne 3 de TM est la ligne 4 de M
- la ligne 4 de TM est la ligne 5 de M
- la ligne 5 de TM est la ligne 1 de M.

TM permute donc les lignes de M selon le schéma :

$$\underbrace{(1,2,3,4,5)}_{M}\longrightarrow\underbrace{(2,3,4,5,1)}_{T(M)}$$

b) MT permute les colonnes de M selon le schéma :

$C_5(M)\longrightarrow C_1(MT)$
$C_4(M)\longrightarrow C_2(MT)$
$C_3(M)\longrightarrow C_3(MT)$
$C_4(M)\longrightarrow C_4(MT)$
$C_1(M)\longrightarrow C_5(MT)$

$C_i(M)$: Colonne n° i de M.

$C_j(MT)$: Colonne n° j de TM.

2) Ici $M=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\\0&1&1&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$.

En appliquant q a) et q b) : a) $T^5M=M$; b) $MT^3=MT=\begin{pmatrix}m_{15}&m_{14}&m_{13}&m_{12}&m_{11}\\m_{25}&m_{24}&m_{23}&m_{22}&m_{12}\\m_{35}&m_{34}&m_{33}&m_{32}&m_{13}\\m_{45}&m_{44}&m_{43}&m_{42}&m_{14}\\m_{55}&m_{54}&m_{53}&m_{52}&m_{15}\end{pmatrix}$

c) $T^2MT^2=T^2M=\begin{pmatrix}m_{31}&m_{32}&m_{33}&m_{34}&m_{35}\\m_{41}&m_{42}&m_{43}&m_{44}&m_{45}\\\vdots\end{pmatrix}$.

Attention : les trois dernières lignes n'ont pas été scannées mais vous les compléterez seuls.

Exercice III (104 p249)

1) $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ donc $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ et $A^3=0=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ par calcul matriciel de produits.

Par récurrence immédiate, $A^n=0$ pour tout entier $n\geqslant 4$. (et même pour tout entier $n\geqslant 3$)!

2) $x\in\mathbb{R}$ et $M(x)=I_3+xA+\frac{x^2}{2}A^2$ (R_1) Rq : l'énoncé note $I_4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ c'est une coquille rectifiée en I_3.

a) $M(0)=I_3+0A+\frac{0^2}{2}A^2$, donc $\boxed{M(0)=I_3}$.

$B=M(4)=I_3+4A+8A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&4&0\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&8\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$$\boxed{B=M(4)=\begin{pmatrix}1&4&8\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}}$$

b) $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, d'après ($R$) : $M(x)\times M(y)=\left(I_3+xA+\frac{x^2}{2}A^2\right)\left(I_3+yA+\frac{y^2}{2}A^2\right)$

$M(x)\times M(y)=I_3^2+yA+\frac{y^2}{2}A^2+xA\times I_3+xyA^2+\frac{xy^2}{2}A^3+\frac{x^2}{2}A^2\times I_3+\frac{x^2}{2}yA^3+\frac{x^2}{2}\times\frac{y^2}{2}\times A^4$

OR $A^3=0$ et $A^4=0$, donc :

$M(x)\times M(y)=I_3+yA+\frac{y^2}{2}A^2+xA+xyA^2+\frac{x^2}{2}A^2=I_3+(x+y)A+\frac{1}{2}\underbrace{\left(x^2+2xy+y^2\right)}_{=(x+y)^2}A^2$

$M(x)\times M(y)=I_3+(x+y)A+\frac{1}{2}(x+y)^2A^2=M(x+y)$.

Ainsi, $\boxed{\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ M(x)\times M(y)=M(x+y)}$

3) $\boxed{M(x)}=I_3+xA+\frac{x^2}{2}A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&x&0\\0&0&x\\0&0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\frac{x^2}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&x&\frac{x^2}{2}\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix}}$

4) On sait que $M(0)=I_3$ (q 2a). Soient x et x' des réels.

$M(x)\times M(x')=M(x+x')$ (q. 2b)).

Ainsi $M(x)\times M(x')=I_3 \iff M(x+x')=I_3$

Nous allons prouver que $M(x+x') = I_3$ équivaut à $x+x'=0$ c'est à dire à $x'=-x$.

($\Rightarrow$) Supposons que $M(x+x') = I_3$.

Alors d'après q.3) on a : $\begin{pmatrix} 1 & x+x' & \frac{(x+x')^2}{2} \\ 0 & 1 & x+x' \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et donc, par

égalité matricielle : $x+x'=0$ et $\frac{(x+x')^2}{2}=0$ donc $x+x'=0$ donc $x'=-x$.

($\Leftarrow$) Réciproquement : Si $x'=-x$, alors $x'+x=0$ et $M(x+x') = M(0) \overset{q.2a)}{=} I_3$

donc $M(x) \times M(x') = I_3$.

<u>Conclusion</u> : $\boxed{M(x) \times M(x') = I_3 \iff x' = -x}$

$B = M(4)$. donc en posant $B' = M(-4)$, on a grâce à ce établissement que $B \times B' = I_3$.

<u>Rq</u> : $B' = M(-4)$ est donc l'inverse de B.

Exercice IV (102 p 249)

$u_0 = 0$; $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. $(*)$

$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1a) Par produit matriciel : $F^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $F^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

1b) $n \geq 1$. Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $F^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$.

Initialisation :

Pour $n=1$: $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 & u_1 \\ u_1 & u_0 \end{pmatrix}$ car $\boxed{u_2} = u_1 + u_0 = 1+0 = \boxed{1}$; $u_1 = 1$ et $u_0 = 0$.

donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier supérieur ou égal à 1 fixé.

Supposons que pour cet entier là, $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, c'est à dire : Supposons que $F^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$.

Alors : $F^{n+1} = F^n \times F \overset{\text{produit matriciel}}{=} \begin{pmatrix} u_{n+1}+u_n & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n + u_{n-1} \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix}$; $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion :

$\mathcal{P}(1)$ est vraie, et héréditaire à tout rang $n \geq 1$.

donc d'après le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $F^n = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$ (avec $u_0 = u_1 = 1$).

2a) Par associativité du produit matriciel : $F^{i+j} = F^i \times F^j$ pour tous entiers naturels i et j.

donc $\boxed{F^{2n+2} = F^{n+2+n} = F^{n+2} \times F^n}$

2b) Traduisons à l'aide des coefficients la relation 2a) : $F^{2n+2} = F^{n+2} \times F^n$ s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} u_{2n+2} & u_{2n+1} \\ u_{2n+1} & u_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} & u_{n+1} \\ u_{n+1} & u_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} u_{2n+2} & u_{2n+1} \\ u_{2n+1} & u_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \times u_{n+1} + u_{n+1} \times u_n & ** \\ ** & *** \end{pmatrix}$$

Par identification des coefficients situés à l'intersection de la 1re ligne et 1re colonne on a :

$\boxed{\text{Pour tout entier } n \geq 1, \quad u_{2n+2} = u_{n+2} \times u_{n+1} + u_{n+1} \times u_n}$

2c) Grâce à 2b) : pour $m \geqslant 1$, $u_{2m+2} = u_{m+2} \times u_{m+1} + u_{m+1} \times u_m$ (**)

On veut manifestement faire disparaître les u_{m+1} :

Or d'après la définition de (u_n), $\forall m \in \mathbb{N}$, $u_{m+2} = u_{m+1} + u_m$, donc $u_{m+1} = u_{m+2} - u_m$.

Par suite (**) donne : $u_{2m+2} = u_{m+2} \times (u_{m+2} - u_m) + (u_{m+2} - u_m) \times u_m$

$$u_{2m+2} = u_{m+2}^2 - \cancel{u_{m+2} \times u_m} + \cancel{u_{m+2} \times u_m} - u_m^2$$

$$\boxed{u_{2m+2} = u_{m+2}^2 - u_m^2}.$$

3) $u_{12} = 144 = 12^2$

2c) Se réécrit en : $u_{m+2}^2 = u_{2m+2} + u_m^2$ Ce qui fait vaguement penser à l'égalité de Pythagore pourvu que u_{2m+2} soit un carré.

Posons : $u_{2m+2} = u_{12} = 144$: $2m+2 = 12$, donc $m = 5$.

Ainsi : $u_7^2 = 12^2 + u_5^2$

Or avec la relation : $u_{m+2} = u_{m+1} + u_m$, on a facilement : $u_5 = 5$ et $u_7 = 13$

Ainsi : $13^2 = 12^2 + 5^2$. Un tel triangle a donc pour longueurs de côtés : $\boxed{\text{5 ; 12 et 13 unités de longueur}}$

Ce triangle existe bien car 13 < 5 +12 (inégalité triangulaire vérifiée).

Exercice V

a) $^T\!A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $^T\!B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

b) i) $A = O_m$ est symétrique d'ordre m.
I_m est symétrique d'ordre m.
$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique d'ordre m : $\forall (i;j) \in [\![1;m]\!]^2$, $w_{ij} = 1$ où $J = (w_{ij})$.

O_m est également antisymétrique d'ordre m car $-O_m = O_m$ et $^T O_m = O_m$.

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ -1 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (que des 1 au dessus de la diagonale
que des −1 en dessous de la diagonale
que des 0 sur la diagonale) : B est antisymétrique d'ordre m.
Tout comme 2B.

ii) Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$. et ${}^T A = (w_{ij})$ où $\forall 1 \leq i \leq n, \forall 1 \leq j \leq n, w_{ij} = a_{ji}$

Si A est antisymétrique, alors ${}^T A = -A$ se traduit par : $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, \underbrace{a_{ji}}_{w_{ij}} = -a_{ij}$

donc pour $i = j$, on a : $\underline{\forall i \in [\![1;n]\!], a_{ii} = -a_{ii}}$, donc $2a_{ii} = 0$, donc $\underline{\underline{a_{ii} = 0}}$

Ainsi, tous les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.

iii) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Si A est à la fois symétrique et antisymétrique, alors on a :

${}^T A = A$ et ${}^T A = -A$, donc $A = -A$, donc $2A = 0_n$, donc $\underline{A = 0_n}$.

On a vu en b) que 0_n était à la fois symétrique et antisymétrique.

donc la seule matrice carrée d'ordre n à être à la fois symétrique et antisymétrique est la matrice nulle 0_n.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ où $\forall i \in [\![1;n]\!], x_i \in \mathbb{R}$. ${}^T X$ = matrice ligne donc ${}^T X X$ = matrice 1×1 = réel.

iv) ${}^T X X = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}_{\in \mathbb{R}}$

Lorsque $n = 2$: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\underline{\underline{{}^T X X = x_1^2 + x_2^2 = \|X\|^2}}$. On note ici sans flèche le vecteur colonne X

c) i) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

de plus : $JX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3X$.

donc $\boxed{X \text{ est un vecteur propre de } J \text{ associé à la valeur propre } \lambda = 3.}$

de même : $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc $Y \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $JY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $JY = 0Y$: $\boxed{Y \text{ est un vecteur propre de } J \text{ associé à la valeur propre } 0.}$

ii) X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre ($\lambda \in \mathbb{R}$).

donc $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $AX = \lambda X$.

Soit $\mathcal{S}(k)$: $A^k . X = \lambda^k X$ où $k \in \mathbb{N}$.

<u>On procède par récurrence sur l'entier k :</u>

<u>Initialisation</u> : Pour $k=0$, $A^0 = I_m$, donc $A^0 X = I_m X = X$ et $\lambda^0 X = 1.X = X$, donc $A^0 . X = \lambda^0 . X$: <u>$\mathcal{S}(0)$ est vraie</u>.

<u>Hérédité</u> : Soit k un entier fixé tel que : $A^k . X = \lambda^k X$.

Alors $A^{k+1} X = A^k . \underbrace{AX}_{} = A^k . \underbrace{(\lambda X)}_{} = \lambda A^k . X \underset{\text{H. récurrence}}{=} \lambda . \lambda^k X = \lambda^{k+1} X$

car X vecteur propre de A.

donc <u>$\mathcal{S}(k+1)$ est vraie</u>.

<u>Conclusion</u> : $\mathcal{S}(0)$ vraie, et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}(k)$ est héréditaire. Donc $\forall k \in \mathbb{N}$, X est vecteur propre de A^k associé à la valeur propre λ^k.

<u>Post-bac</u>

<u>Exercice VI</u> (109 p.253)

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2I_3 + N$ où $\boxed{N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

On a : $\boxed{N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3}$.

b) Avant tout, il est bon d'observer que <u>pour tout entier $k \geq 3$, $N^k = O_3$</u> : en effet, si $k \geq 3$, $N^k = N^3 . N^{k-3} \underset{1a)}{=} O_3 . N^{k-3} = O_3$.

On procède par récurrence sur l'entier $n \geq 1$: soit $\mathcal{S}(n)$: $A^n = 2^n I_3 + n 2^{n-1} N + n(n-1) 2^{n-3} N^2$

<u>Initialisation</u> : <u>Pour $n=1$</u> : $2^1 I_3 + 1 \times 2^0 N + 1 \times 0 \times 2^{1-2} N^2 = \underline{2I_3 + N} \underset{1.a}{=} \underline{A} = A^1$.

donc <u>$\mathcal{S}(1)$ est vraie</u>.

Hérédité : Soit n un entier supérieur ou égal à 1 fixé. Supposons que pour cet entier là, $\mathcal{P}(n)$ soit vraie c'est à dire que : $A^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}N + n(n-1)2^{n-3}N^2$ ← hypothèse de récurrence

Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire que : $A^{n+1} = 2^{n+1}I_3 + (n+1)2^n N + n(n+1)2^{n-2}N^2$ But

Or $A^{n+1} = \underbrace{A}_{1a)}.A^n \overset{\text{Par hyp. de récurrence}}{=} A.\left(2^n I_3 + n2^{n-1}N + n(n-1)2^{n-3}N^2\right)$

$A^{n+1} = (2I_3+N)\left(2^n I_3 + n2^{n-1}N + n(n-1)2^{n-3}N^2\right)$: en distribuant ; $\begin{pmatrix} I_3^2 = I_3 \\ N.I_3 = N \end{pmatrix}$ etc

$A^{n+1} = 2^{n+1}I_3 + n2^nN + n(n-1)2^{n-2}N^2 + 2^nN + n2^{n-1}N^2 + n(n-1)2^{n-3}\underbrace{N^3}_{=O_3 \; 1.b)}$

$A^{n+1} = 2^{n+1}I_3 + (n2^n + 2^n)N + (n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1})N^2$

$A^{n+1} = 2^{n+1}I_3 + 2^n(n+1)N + 2^{n-2}(n(n-1)+2n)N^2$ $\qquad n(n-1)+2n = n(n-1+2) = n(n+1)$

$A^{n+1} = 2^{n+1}I_3 + (n+1)2^nN + n(n+1)2^{n-2}N^2$: $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(1)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = 2^nI_3 + n2^{n-1}N + n(n-1)2^{n-3}N^2}$

c) Trouvons une matrice B carrée d'ordre 3 telle que : $AB = I_3$:

On s'aide de sa machine (en terminale).

En posant $B = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,25 & -0,25 & 0,5 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ on vérifie facilement que :

$AB = I_3$, donc B est l'inverse de A : $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}$

2) $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (ax^2+bx+c)e^{2x}$

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = u(x)v(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = ax^2+bx+c \\ u'(x) = 2ax+b \end{cases}$ $\quad \begin{cases} v(x) = e^{2x} \\ v'(x) = 2e^{2x}. \end{cases}$

$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (2ax+b)e^{2x} + 2(ax^2+bx+c)e^{2x}$.

$f'(x) = (2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c)e^{2x} = (2ax^2 + (2a+2b)x + b + 2c)e^{2x}$.

<u>Posons</u> : $a_1 = 2a$; $b_1 = 2a+2b$ et $c_1 = b+2c$: on a bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1)e^{2x}}$$

On a donc : $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, donc $\boxed{\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}$.

b) Là encore, procédons par récurrence sur l'entier $n \geq 1$:

Soit $Q(n)$: $\exists (a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = (a_nx^2 + b_nx + c_n)e^{2x}$.

<u>Initialisation</u> : Faite en 2a) !

<u>Hérédité</u> : Soit n un entier non nul fixé tel que $Q(n)$ soit vraie :

$\exists (a_n ; b_n ; c_n) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = (a_nx^2 + b_nx + c_n)e^{2x}$. (H.R.).

Montrons alors l'existence de réels notés a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} tels que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+1)}(x) = (a_{n+1}x^2 + b_{n+1}x + c_{n+1})e^{2x}$. (But).

Or $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$. ($f^{(n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car produit et composé de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$).

Par hypothèse de récurrence : $\exists (a_n ; b_n ; c_n) \in \mathbb{R}^3,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = (a_nx^2 + b_nx + c_n)e^{2x}$.

donc : $f^{(n+1)}(x) = (2a_nx + b_n)e^{2x} + 2(a_nx^2 + b_nx + c_n)e^{2x}$ (dérivée d'un produit)

Ainsi : $f^{(n+1)}(x) = \left(2a_n x^2 + (2a_n + 2b_n)x + b_n + 2c_n\right)e^{2x}$.

On définit donc les réels a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} par : $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 2b_n \\ c_{n+1} = b_n + 2c_n \end{cases}$. (∗)

Ainsi on a bien : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}(x) = (a_{n+1}x^2 + b_{n+1}x + c_{n+1})e^{2x}$: $Q(n+1)$ est vraie :

Conclusion : $Q(1)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $Q(n)$ est héréditaire.

donc par principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (a_n; b_n; c_n) \in \mathbb{R}^3, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = (a_n x^2 + b_n x + c_n)e^{2x}}$

(∗) s'écrit matriciellement : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ c'est-à-dire : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

Par récurrence facile la précédente relation conduit sans peine à :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ avec : $\begin{cases} a_1 = 2a \\ b_1 = 2a + 2b \\ c_1 = b + 2c \end{cases}$.

et grâce à q.1b), $A^{n-1} = 2^{n-1} I_3 + (n-1).2^{n-2} N + (n-1)(n-2)2^{n-4} N^2$.

$$A^{n-1} = 2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (n-1)2^{n-2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + (n-1)(n-2)2^{n-4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} + (n-1)2^{n-1} & 0 & 0 \\ (n-1)2^{n-1} & 2^{n-1} + (n-1)2^{n-1} & 0 \\ (n-1)(n-2)2^{n-3} & (n-1)2^{n-2} & 2^{n-1} + (n-1)2^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{n-1} = \begin{pmatrix} n2^{n-1} & 0 & 0 \\ (n-1)2^{n-1} & n2^{n-1} & 0 \\ (n-1)(n-2)2^{n-3} & (n-1)2^{n-2} & n2^{n-1} \end{pmatrix}}$$

Ainsi : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\,2^{n-1} & 0 & 0 \\ (n-1)\,2^{n-1} & n\,2^{n-1} & 0 \\ (n-1)(n-2)\,2^{n-3} & (n-1)\,2^{n-2} & n\,2^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2a \\ 2a+2b \\ b+2c \end{pmatrix}$

Donc : $\begin{cases} a_n = n \times 2^n \times a \\ b_n = (n-1)2^n \times a + n\,2^{n-1} \times 2(a+b) = (n-1)2^n a + n\,2^n (a+b) \\ c_n = (n-1)(n-2)\,2^{n-2} \times a + (n-1)\,2^{n-1}(a+b) + n\,2^{n-1}(b+2c) \end{cases}$

$$\begin{cases} a_n = a \times n \times 2^n \\ b_n = \left((2n-1)a + nb\right)2^n \\ c_n = a\Big(\underbrace{(n-1)(n-2)\,2^{n-2} + (n-1)\,2^{n-1}}_{= (n-1)\,2^{n-2} \times (n-2+2)}\Big) + b\Big(\underbrace{(n-1)\,2^{n-1} + n\,2^{n-1}}_{= (2n-1)\,2^{n-1}}\Big) + n.2^n.c. \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} a_n = a \times n \times 2^n \\ b_n = \left((2n-1)a + nb\right)2^n \\ c_n = a \times n(n-1)\,2^{n-2} + b \times (2n-1)\,2^{n-1} + c \times n \times 2^n \end{cases}} \quad (**)$$

Rq : En faisant $n = 1$ dans $(**)$, on retrouve les résultats de q.2a), ce qui est bon signe !

Exercice VII

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\quad C(A) = \{ M \in M_2(\mathbb{R}) \mid MA = AM \}$

1) Soient : $M \in C(A)$ et $N \in C(A)$.

On pose $B = M + N$.

$AB = A(M+N) = AM + AN = MA + NA = (M+N)A = BA$.

Donc : $\boxed{AB = BA}$

Ainsi $C(A)$ est stable par addition.

2) Soient $M \in C(A)$ et $N \in C(A)$.

On pose $B = MN$

Donc : $AB = AMN = MAN = MNA = BA$ car le produit matriciel associatif.

Donc : $\boxed{AB = BA}$

Ainsi, $C(A)$ est stable par produit matriciel.

3) Soit $M \in C(A)$.

Supposons que M soit inversible, alors par définition :

$MM^{-1} = I$

Donc : $AMM^{-1} = AI$

Par suite : $MAM^{-1} = A$ car $M \in C(A)$.

Donc en prémultipliant par M^{-1} : $M^{-1}MAM^{-1} = M^{-1}A$

Ainsi : $\boxed{AM^{-1} = M^{-1}A}$

Donc : si $M \in C(A)$ est inversible alors : $M^{-1} \in C(A)$.