**Maths Expertes Groupe 2** **Corrigé du DM 3** **Décembre 2024**

**Merci Juliette J-P.**

## Exercice I :

L'équation (F) est défini par $z^2+z+1=0$

Proposition 1 : " L'équation (F) a deux solutions complexes dont le produit est égal à 1 ".

On a l'équation (F) suivante : $z^2+z+1=0$

C'est une équation du 2nd degré~~s~~ de la forme :

$az^2+bz+c=0$ avec $a=1$ ; $b=1$ et $c=1$.

Calculons $\Delta$ :

$\Delta = b^2-4ac = (1)^2 - 4\times 1\times 1$

$\Delta = 1-4 = -3$

$\Delta < 0$ ; donc l'équation (F) admet deux solutions dans $\mathbb{C}$.

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{-1+i\sqrt{|-3|}}{2\times 1} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z_2 = \overline{z_1} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$ Oui

Donc (F) admet deux solutions complexes.

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \; ; \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}.$$

Faisons le produit des deux solutions complexes.

or $\Delta \neq 0$ donc $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$

Oui

or $c = 1$ et $a = 1$

donc $z_1 \times z_2 = \frac{1}{1} = 1$

Donc le produit des deux solutions complexes de l'équation (F) est égal à 1.
Donc la proposition 1 est VRAIE. Oui

· Proposition 2 : "Pour tout réel a, l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ : $z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0$ admet deux solutions non réelles".

On a $z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$.
On a une équation du 2nd degrés de la forme :
$az^2 + bz + c = 0$ avec $a = 1$ ; $b = 2a$ et $c = a^2 + 1$.

Calculons $\Delta$ :

$\Delta = b^2 - 4ac = (2a)^2 - 4 \times 1 \times (a^2 + 1)$

$\Delta = 4a^2 - 4(a^2 + 1) = 4a^2 - 4a^2 - 4$

$\Delta = -4$

$\Delta < 0$ donc l'équation admet deux solutions dans $\mathbb{C}$.

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \dfrac{-2a + i\sqrt{|-4|}}{2 \times 1} = \dfrac{-2a}{2} + \dfrac{\sqrt{4}}{2}i \\ z_1 = -a + \dfrac{2}{2}i = -a + i \\ z_2 = \overline{z_1} = -a - i \end{cases}$$

Oui

donc $S_{\mathbb{C}} = \{-a - i ; -a + i\}$ Oui

Donc l'équation : $z^2 + 2az + a^2 + 1 = 0$ admet deux solutions non réelles : $-a-i$ et $-a+i$.
La proposition 2 est VRAIE. Bravo

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$, l'équation : $z+|z|^2=7+i$

- Proposition 3 : " Cette équation admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$ ".

$z$ est un complexe donc $z$ peut s'écrire sous la forme :

$z=x+yi$, et $|z|^2=|x+yi|^2$

avec $x$ et $y$ réels $\quad |z|^2=x^2+y^2$

donc on a : $z+|z|^2=7+i$

$\Leftrightarrow x+yi+x^2+y^2=7+i$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x+x^2+y^2)}_{\text{partie réelle}}+\underbrace{yi}_{\text{partie imaginaire}}=7+i$

Or deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

Oui

Donc on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} x+x^2+y^2=7 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+x^2+(1)^2=7 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+x^2=6 \\ y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+x^2-6=0 \\ y=1 \end{cases}$$

Or $x+x^2=0$ est une équation du 2nd degré de la forme : $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$ ; $b=1$ et $c=-6$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times1\times(-6)$

$\Delta=1+24=25$

$\Delta>0$ donc l'équation $x^2+x-6=0$ admet deux solutions dans $\mathbb{C}$ :

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-\sqrt{25}}{2\times1}=\dfrac{-1-5}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3 \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+\sqrt{25}}{2\times1}=\dfrac{-1+5}{2}=\dfrac{4}{2}=2 \end{cases}$$

donc on a : $\begin{cases} x_1=-3 \text{ ou } x_2=2 \\ y=1 \end{cases}$

Oui

Donc on a : $z_1=-3+i$ ou $z_2=2+i$

Donc cette équation admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{C}$.

La proposition 3 est VRAIE !

Oui

Exercice II :

1) Résolvons l'équation suivante : $z^4+z^2-1=0$ dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$ !

Posons $Z=z^2$ donc $Z^2=(z^2)^2=z^4$ Oui

L'équation $z^4+z^2-1=0$ s'écrit donc :

$$Z^2+Z-1=0$$

On a donc une équation du 2^nd degré de la forme : $aZ^2+bZ+c=0$ avec $a=1$ ; $b=1$ et $c=-1$

$\Delta=b^2-4ac=(1)^2-4\times1\times(-1)$ Oui

$\Delta=1+4=5$

$\Delta>0$, donc l'équation $Z^2+Z-1=0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} Z_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2\times1}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ \text{et} \\ Z_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2\times1}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Repassons à $z^2$

on a $Z=z^2$

Donc on a : $(z_1)^2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $(z_2)^2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ ces deux équations !

$(z_1)^2=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ or $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\approx0{,}62$ donc $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}>0$

donc : $z_1=\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ ou $z_1=-\sqrt{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}$ Oui.

$\boxed{z_1=\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{-1+\sqrt{5}})}{2}}$ ou $\boxed{z_1=-\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{-1+\sqrt{5}})}{2}}$

et $(z_2)^2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ or $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\approx-1{,}62$ donc $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}<0$

Donc $(z_2)^2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ Bien

$S_{\mathbb{R}}=\{\sqrt{2}(\sqrt{-1+\sqrt{5}}) ; \sqrt{2}(\sqrt{-1+\sqrt{5}})\}$

Exercice II (suite) :

1(suite)) Donc $z^4+z^2-1=0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$ qui sont $\frac{-\sqrt{2}(\sqrt{-1+\sqrt{5}})}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{-1+\sqrt{5}})}{2}$

Résolvons donc cette équation dans $\mathbb{C}$.

$Z^2+Z-1=0$ admet de nouveau deux solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont : $Z_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $Z_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Or $Z=z^2$

Donc on a $(z_1)^2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $(z_2)^2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

Résolvons ces deux équations dans $\mathbb{C}$ :

$(z_1)^2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ admet les deux mêmes solutions que dans $\mathbb{R}$.

Donc on a de nouveau : $z_1=\frac{-\sqrt{2}(\sqrt{-1+\sqrt{5}})}{2}$ et $z_1'=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{-1+\sqrt{5}})}{2}$

De plus, $(z_2)^2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ admet des solutions dans $\mathbb{C}$, calculons ces solutions.

$$(z_2)^2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$(z_2)^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\times(-1)$$

$$(z_2)^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)i^2$$

Bien

$$(z_2)^2=\left(i\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^2$$

$$(z_2)^2-\left(i\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^2=0$$

$$\left(z_2-i\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)\left(z_2+i\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)=0$$

oui

On a un facteur de produit nul.
Donc on obtient :

$z_2 - i\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 0$ ou $z_2 + i\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = 0$

$z_2 = i\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ ou $z_2 = -i\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

$\boxed{z_2 = i\,\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)}{2}}$ ou $\boxed{z_2 = -i\,\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)}{2}}$

Ainsi, l'équation $z^4 + z^2 - 1 = 0$ admet 4 (quatre) solutions dans $\mathbb{C}$ qui sont : $i\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)}{2}$ ; $-i\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)}{2}$ ; $-\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{-1+\sqrt{5}}\right)}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{-1+\sqrt{5}}\right)}{2}$

Donc $\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{-\sqrt{2}\left(\sqrt{-1+\sqrt{5}}\right)}{2} ; \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{-1+\sqrt{5}}\right)}{2}\right\}}$ Bien

et

$\boxed{\mathcal{S}_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{-\sqrt{2}\left(\sqrt{-1+\sqrt{5}}\right)}{2} ; \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{-1+\sqrt{5}}\right)}{2} ; -i\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)}{2} ; i\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{1+\sqrt{5}}\right)}{2}\right\}}$ oui

2) On a l'équation $z^2 + mz + 13 = 0$ définie dans $\mathbb{C}$.
On veut que $3-2i$ soit une solution dans $\mathbb{C}$ de cette équation.
Donc on considère que $z = 3-2i$
On cherche à déterminer le réel $m$
Donc on résout l'équation suivante d'inconnue $m$ :

$z^2 + mz + 13 = 0$ avec $z = 3-2i$

donc : $(3-2i)^2 + m(3-2i) + 13 = 0$

$9 - 12i - 4 + 3m - 2mi + 13 = 0$

$(18 + 3m) + (-12 - 2m)i = 0$

partie réelle partie imaginaire

Or un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont égales à 0.
On obtient donc les équations suivantes:

$18+3m=0$ et $-12-2m=0$

$3m=-18$ et $-2m=12$

$m=\frac{-18}{3}$ et $m=\frac{12}{-2}$

$m=-6$ et $m=-6$.

$S=\{-6\}$

Ainsi pour que $3-2i$ soit solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2+mz+13=0$, il faut que $m$ soit égale à $-6$

Oui

3) On a : a, b et c des réels non nuls
De plus, on a l'équation $az^2+bz+c=0$ qui a 2 solutions deux
C'est une équation du 2nd degrés de la forme
$az^2+bz+c=0$
Calculons $\Delta$:
$\Delta=b^2-4ac$
Or on suppose que $az^2+bz+c=0$ admet deux solutions donc $\Delta$ ne peut pas être égal à 0. Oui
Procédons par disjonction de cas: TBien
• si $\Delta>0$ alors deux solutions :
$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Ainsi, on a : $a(z_1-z_2)^2=a\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}-\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)^2$

$a(z_1-z_2)^2=a\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$

$a(z_1-z_2)^2=a\left(\frac{-2\sqrt{\Delta}}{-2a}\right)^2$

$a(z_1-z_2)^2=a\left(\frac{-\sqrt{\Delta}}{a}\right)^2$ Oui

$$a(z_1-z_2)^2 = a \times \frac{\Delta}{a^2}$$

$$a(z_1-z_2)^2 = \frac{\Delta}{a} = \frac{b^2-4ac}{a}$$ Oui donc $(a(z_1-z_2))^2 = \Delta$

• Si $\Delta < 0$ alors deux solutions :

. $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Donc on a : $$a(z_1-z_2)^2 = a\left(\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} - \left(\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\right)^2$$

$$a(z_1-z_2)^2 = a\left(\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} + \frac{b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)^2$$

$$a(z_1-z_2)^2 = a\left(\frac{2i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)^2$$

$$a(z_1-z_2)^2 = a\left(\frac{i\sqrt{|\Delta|}}{a}\right)^2$$

$$a(z_1-z_2)^2 = a \times \left(\frac{-|\Delta|}{a^2}\right)$$ Minute

or $|\Delta| = -\Delta$ car ici $\Delta < 0$

$$a(z_1-z_2)^2 = \frac{-|\Delta|}{a} = \frac{-\cancel{b}^2-4ac}{a}$$

L'écriture ; $(a(z_1 - z_2))^2 = \Delta$ donne une expression de delta en fonction des racines de l'équation.

On a ici une relation réciproque : dans le cours, on a exprimé les racines de l'équation en fonction de $\Delta$, ici on a exprimé $\Delta$ en fonction des racines !