Exercice I

$x^2 - y^2 = 35$ se réécrit après factorisation en : $(x+y)(x-y) = 35$. (*)

Ainsi, les couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ solutions de (*), sont tels que $x+y$ et $x - y$ sont des diviseurs associés de 35.

Or dans $\mathbb{Z}$, les décompositions de 35 en un produit de deux entiers sont : $-1\times(-35)$, $-5\times(-7)$, 1×35 et 5×7.

Donc on a les huit cas de figure suivants :

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-35 \end{cases} ou \begin{cases} x+y=-5 \\ x-y=-7 \end{cases} ou \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=35 \end{cases} ou \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=7 \end{cases} ou \begin{cases} x+y=-35 \\ x-y=-1 \end{cases} ou \begin{cases} x+y=-7 \\ x-y=-5 \end{cases} ou$$

$$\begin{cases} x+y=35 \\ x-y=1 \end{cases} ou \begin{cases} x+y=7 \\ x+y=5 \end{cases}.$$

La résolution triviale (par combinaison linéaire) de ces systèmes conduit à :

$$\begin{cases} x=-18 \\ y=17 \end{cases} ou \begin{cases} x=-6 \\ y=1 \end{cases} ou \begin{cases} x=18 \\ y=-17 \end{cases} ou \begin{cases} x=6 \\ y=-1 \end{cases} ou \begin{cases} x=-18 \\ y=-17 \end{cases} ou \begin{cases} x=-6 \\ y=-1 \end{cases} ou \begin{cases} x=18 \\ y=17 \end{cases} ou \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$$

Réciproquement, on vérifie sans peine que chacun de ces huit couples d'entiers est bien solution de l'équation (*).

$\mathscr{S} = \{(-18;17);(-6;1);(18;-17);(6;-1);\{(-18;-17);(-6;-1);(18;17);(6;1)\}\}$.

Exercice II

1)

n est impair, donc il existe un entier naturel k tel que : $n = 2k+1$.

Donc $n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = (2k+1-1)(2k+1+1)$ $\quad (A^2 - B^2 = (A+B)(A-B))$

$n^2 - 1 = 2k(2k+2) = 2k \times 2 \times (k+1) = 4k(k+1)$.

Or $k(k+1)$ est le produit de deux entiers consécutifs, donc $k(k+1)$ est pair (le voir, si besoin est, en distinguant les cas où k est pair et celui où k est impair).

Par suite, il existe un entier ℓ tel que : $k(k+1) = 2\ell$.

et donc : $n^2 - 1 = 4 \times 2\ell = 8\ell$ avec $\ell \in \mathbb{N}$, donc <u>$n^2 - 1$ est un multiple de 8</u>.

i) On raisonne <u>par contraposition</u> :

Montrons que si n est un entier pair, alors $\frac{n(n+2)}{4}$ est un entier.

<u>Supposons n pair</u> : $n = 2k$ avec k entier.

Alors $\frac{n(n+2)}{4} = \frac{2k(2k+2)}{4} = \frac{2k \times 2(k+1)}{4} = k(k+1)$ avec $k(k+1) \in \mathbb{Z}$ car $\mathbb{Z}$ stable par + et $\times$.

Donc $\boxed{\frac{n(n+2)}{4} \in \mathbb{Z}}$.

<u>Par contraposée</u> on a bien établi que : $\boxed{\text{Si } \frac{n(n+2)}{4} \notin \mathbb{Z}, \text{ alors } n \text{ est impair}}$.

Exercice III

Soit m un entier impair ; $m = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$.

Soit k le premier terme de la somme considérée notée S :

$$S = \underbrace{k + (k+1) + \cdots + (k+2p)}_{\substack{\text{Somme de } 2p+1 = m \\ \text{entiers consécutifs.}}} = \sum_{i=0}^{2p} (k+i).$$

$$S = \underbrace{(k + k + \cdots + k)}_{2p+1 \text{ termes}} + \underbrace{(1+2+\cdots+2p)}_{\text{Somme de Gauss de } 2p \text{ termes.}}$$

$$S = \overbrace{(2p+1)k} + \overbrace{\frac{2p(2p+1)}{2}}$$

Rappel : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$1+2+\cdots+n =$ nb termes $\times$ Moyenne des termes extrêmes.

$$S = (2p+1)k + p(2p+1)$$

$$S = (2p+1)(k+p). \quad \text{avec } m = 2p+1.$$

$\underline{\underline{S = (k+p)m}}$ et $(k+p) \in \mathbb{N}$ car $\mathbb{N}$ stable par addition.

donc m est un diviseur de S : <u>la somme d'un nombre impair d'entiers consécutifs est divisible par le nombre de termes que comporte cette somme.</u>

Si m est pair, le résultat précédent <u>n'est plus vrai</u> :

<u>Contre-exemple</u> : Si $m=4$, alors $\underbrace{1+2+3+4}_{\substack{\text{Somme de 4} \\ \text{entiers consécutifs}}} = 10$ et 4 n'est pas un diviseur de 10.

Exercice IV

$P(x) = ax^2 + bx + c$ avec : a, b, c entiers.

1) $x \in \mathbb{Z}$. Si x est solution de $P(x) = 0$, alors : $ax^2 + bx + c = 0$.

Donc $c = -ax^2 - bx$, donc $c = x(-ax - b)$ avec $-ax - b \in \mathbb{Z}$

Vu que a, x, b sont des entiers et que $\mathbb{Z}$ est stable par addition et produit.

donc $\boxed{x \text{ divise } c}$

2) " Si un entier x divise c, alors x est solution de l'équation $P(x) = 0$ "

Elle est fausse ! Contre exemple : $P(x) = x^2 + 1$ et $x = 1$: Ici $c = 1$, donc comme 1 divise 1, on a bien x divise c. Pour autant, $P(1) = 1^2 + 1 = 2$, donc $P(1) \neq 0$ et 1 n'est pas solution de l'équation $P(x) = 0$.

3) $-15x^2 - 16x + 1 = 0$. $(*)$

Ici $c = 1$, donc comme les diviseurs dans $\mathbb{Z}$ de 1 sont -1 et 1, d'après la question 1, on regarde si chacune de ces valeurs est solution de $(*)$:

Pour $x = 1$: $-15x^2 - 16x + 1 = -15 - 16 + 1 = -30$ et $-30 \neq 0$, donc 1 non solution de $(*)$.

Si $x = -1$: $-15x^2 - 16x + 1 = -15 + 16 + 1 = 2$ et $2 \neq 0$, donc -1 non solution de $(*)$.

donc $(*)$ n'a aucune solution entière.

4) $ax^2 + bx + c = 0$ avec a, b, c entiers a deux solutions entières, notons les x_1 et x_2.

A priori trois cas sont possibles : 1) x_1 et x_2 sont des nombres rationnels.
2) x_1 et x_2 sont des nombres irrationnels
3) $x_1 \in \mathbb{Q}$ et $x_2 \notin \mathbb{Q}$ (ou $x_1 \notin \mathbb{Q}$ et $x_2 \in \mathbb{Q}$).

Par l'absurde, supposons que le cas 3) ait lieu :

Si $x_1 \in \mathbb{Q}$, $x_2 \notin \mathbb{Q}$, alors $\underline{\underline{x_1 + x_2 \notin \mathbb{Q}}}$ (cf. exercice 7 du cours).

Or $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ $\left(\text{car } \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{(-b+\sqrt{\Delta})}{2a} = -\frac{b}{a}\right)$, et a, b sont entiers

donc $\frac{-b}{a} \in \mathbb{Q}$: contradiction (on aurait $-\frac{b}{a} \notin \mathbb{Q}$ et $-\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$!!).

Ainsi 3) n'a pas lieu d'être, d'où le résultat.

Par exemple, l'équation suivante à coefficients entiers a deux solutions rationnelles : $2x^2 - 3x + 1 = 0$, et l'équation suivante : $2x^2 + 4x + 1 = 0$ a deux solutions irrationnelles.

Exercice V

1)

a) Si $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p et q entiers naturels et q le plus petit possible, alors comme $\sqrt{2} > 1$ (en effet racine de 2 est géométriquement la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 1), on a : $\frac{p}{q} > 1$, et par positivité de q, on a : $p > q$.

b) $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, *donc* $p = q\sqrt{2}$, *donc* $p - q = q\sqrt{2} - q = q(\sqrt{2} - 1)$.

$\sqrt{2} - 1 < 1$ (*si vous n'arrivez pas à le voir prenez une calculatrice …*)

q *est un entier naturel non nul, donc positif*, $q(\sqrt{2} - 1) < q$.

Par suite, comme $p - q = q(\sqrt{2} - 1)$, il en résulte que $p - q < q$, c'est à dire : $q > p - q$.

c) $\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$, *donc comme* $\sqrt{2} - 1 \neq 0$, on a : $\sqrt{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{2-\frac{p}{q}}{\frac{p}{q}-1}$ (*en tenant compte de l'hypothèse faite sur* $\sqrt{2}$).

Ainsi, $\sqrt{2} = \frac{2-\frac{p}{q}}{\frac{p}{q}-1} = \frac{\frac{2q-p}{q}}{\frac{p-q}{q}} = \frac{2q-p}{p-q}$.

d) $\sqrt{2} = \frac{2q-p}{p-q}$, et d'après la question *b)*, $q > p - q$, donc $2q - p > 0$ avec $2q - p$ entier car somme et produit d'entiers, donc $2q - p \in \mathbb{N}^*$.

Toujours d'après la question *b)*, $p - q < q$, et d'après *a)*, $p - q > 0$, donc $p - q$ est un entier naturel non nul.

Ainsi on aurait réussi à écrire $\sqrt{2}$ comme quotient de deux entiers naturels non nuls, avec un dénominateur strictement inférieur à q : c'est là que réside la contradiction, vu que dans l'hypothèse formulée, q était le plus petit entier naturel vérifiant : $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

Ainsi l'hypothèse formulée est fausse, donc son contraire est vrai :

$\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

2) On procède par double implication pour prouver cette équivalence :
Si $b=d$ et $a=c$, alors $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$ est trivial. ($b=d$, donc $b\sqrt{2}=d\sqrt{2}$

Donc : $\begin{array}{r} a = c \\ \hline a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2} \end{array}$

<u>Réciproque</u> : Supposons que (*) $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$ avec $(a,b,c,d)\in\mathbb{Q}^4$:

Alors $(b-d)\sqrt{2}=c-a$ (**)

Si $b\neq d$, alors $b-d\neq 0$ et par suite $\sqrt{2}=\frac{c-a}{b-d}$. Or $\mathbb{Q}$ est stable par différence et quotient, donc on aurait $\frac{c-a}{b-d}\in\mathbb{Q}$, bref $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$: absurde !

Ainsi $b=d$: Donc (**) se réécrit en : $0\sqrt{2}=c-a$, donc $c-a=0$ et $a=c$.

Ainsi si (*) est vraie, alors $a=c$ et $b=d$.

Par double implication, on a bien prouvé le résultat voulu.

3) $a>0$; $b>0$; $a\in\mathbb{Q}$ et $b\in\mathbb{Q}$; $\sqrt{a}\notin\mathbb{Q}$ et $\sqrt{b}\notin\mathbb{Q}$ sont ici les données de l'énoncé.

On raisonne ici par l'absurde, en supposant que : $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$:

1er cas : Si $a=b$, alors $\sqrt{a}+\sqrt{b}=2\sqrt{a}$, donc $2\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$, et comme $\mathbb{Q}$ est stable par division

$\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$ en contradiction avec la donnée $\sqrt{a}\notin\mathbb{Q}$.

donc dans ce cas là, $\underline{\sqrt{a}+\sqrt{b}\notin\mathbb{Q}}$.

2e cas : Si $a\neq b$:

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$

Or $a>0$ donc $\sqrt{a}>0$, $b>0$, donc $\sqrt{b}>0$, donc $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\overset{*}{0}$ (Somme de deux termes strictement positifs).

Or $a\in\mathbb{Q}$, $b\in\mathbb{Q}$, donc $a-b\in\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ est stable par soustraction), donc si $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$

alors comme $\sqrt{a}-\sqrt{b}\underset{*}{=}\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ et que $\mathbb{Q}$ est stable par quotient, on aurait :

$\sqrt{a}-\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$. division licite car $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq 0$!

Par suite : $\begin{cases}\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}\\ \sqrt{a}-\sqrt{b}\in\mathbb{Q}\end{cases}$, donc $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{a}-\sqrt{b}=2\sqrt{a}$ appartiendrait à

$\mathbb{Q}$ car $\mathbb{Q}$ est stable par addition.

$2\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$, donc $\sqrt{a}\in\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ stable par division) : en contradiction avec

$\sqrt{a}=\dfrac{2\sqrt{a}}{2}$ avec $\begin{cases}2\sqrt{a}\in\mathbb{Q}\\ 2\in\mathbb{Q}\end{cases}$

la donnée de l'énoncé $\sqrt{a}\notin\mathbb{Q}$!

donc $\underline{\sqrt{a}+\sqrt{b}\notin\mathbb{Q}}$ là aussi.

Bref avec les données de l'énoncé, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est irrationnel.