Exercice I

1) $\underline{Re(z)=1\ ;\ Im(z)=-4}$

$\underline{Re(z'')=0\ ;\ Im(z'')=8}$

2) $\boxed{z_1}=13-4i-(-7-5i)+3i=13-4i+7+5i+3i=\boxed{20+4i}$

$z_2=(2-i)(1-5i)-2(3-4i)$

$\boxed{z_2}=2-10i-i+5i^2-6+8i=2-5-6-3i=\boxed{-9-3i}$

$\boxed{z_3}=(\sqrt{2}-2\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+2\sqrt{3}i)=\sqrt{2}^2-(2\sqrt{3}i)^2=2-12i^2=\boxed{14}$

$\boxed{z_4}=1+i+i^2+i^3+i^4=1+i-1-i+1=\boxed{1}$

$z_5=\left(1-\frac{2}{3}i\right)^2+(2-\sqrt{3}i)^2$

$z_5=1-\frac{4}{3}i+\left(\frac{2}{3}i\right)^2+4-4\sqrt{3}i+(\sqrt{3}i)^2$

$z_5=1-\frac{4}{3}i+\frac{4}{9}i^2+4-4\sqrt{3}i+3i^2$

$z_5=1-\frac{4}{9}+4-3-\frac{4}{3}i-4\sqrt{3}i$

$\boxed{z_5=\frac{14}{9}-\frac{(4+12\sqrt{3})}{3}i}$

Exercice II

1) $z = \frac{-2+3i}{1-5i} = \frac{(-2+3i)(1+5i)}{(1-5i)(1+5i)} = \frac{-2-10i+3i+15i^2}{1^2+5^2} = \frac{-17-7i}{26}$

$\boxed{z} = \boxed{-\frac{17}{26} - \frac{7}{26}i}$

2) $2iz+1-i = z+(3+2i)^2$

$2iz - z = -1+i+(3+2i)^2$

$z(-1+2i) = -1+i+9+12i-4$

$z(-1+2i) = 4+13i$

$z = \frac{4+13i}{-1+2i} = \frac{(4+13i)(-1-2i)}{(-1+2i)(-1-2i)} = \frac{-4-8i-13i-26i^2}{(-1)^2+2^2}$

$z = \frac{22-21i}{5} = \frac{22}{5} - \frac{21}{5}i$ $\quad \boxed{S_{\mathbb{C}} = \left\{\frac{22}{5}-\frac{21}{5}i\right\}}$.

Exercice III

a) 0, 1 ou 2 car : $n = 3q + r$ et r entier et $0 \leqslant r < 2$. Donc $r \in \{0 ;1 ;2\}$.

b) $\boxed{n^3 - 25n} = n(n^2 - 25) = n(n^2 - 5^2) = \boxed{n(n+5)(n-5).}$

c) D'après la question a), on a :

* Si n = 3q avec q entier (c'est-à-dire lorsque le reste dans la D.E de n par 3 est nul) :

Alors d'après la question b), $n^3 - 25n = n(n+5)(n-5) = 3q(3q+5)(3q-5) = 3w$ avec $w = q(3q+5)(3q-5)$ qui est entier car $\mathbb{Z}$ est stable par addition, soustraction et multiplication.

Donc n est bien multiple de 3.

** Si n = 3q +1, avec q entier, alors de façon similaire :

$n^3 - 25n = (3q+1)(3q+1+5)(3q+1-5) = (3q+1)(3q+6)(3q-4) = 3(q+2)(3q+1)(3q-4)$ qui est bien un multiple de 3.

*** Si n = 3q+2, avec q entier, alors :

$n^3 - 25n = (3q+2)(3q+2+5)(3q+2-5) = (3q+2)(3q+7)(3q-3) = 3(q-1)(3q+2)(3q+74)$ qui est bien un multiple de 3.

Bref dans tous les cas de figures, $n^3 - 25n$ est bien multiple de 3.

Exercice IV

1) C'est l'ensemble des nombres de la forme $\frac{a}{b}$ avec a entier relatif et b entier naturel non nul.

2a) Si r=0, alors $rx = r \times 0 = 0$, et 0 est bien rationnel (0=0/1 par exemple), donc $rx \in \mathbb{Q}$.

2b) x n'est pas rationnel (donnée), et rx est rationnel.

On raisonne par l'absurde en supposant r rationnel non nul.

Alors comme r est non nul, on a : $x = \frac{rx}{r}$. Or le quotient de deux rationnels est rationnel car $\mathbb{Q}$ est stable par quotient, donc on aurait $x \in \mathbb{Q}$, ce qui contredit la donnée x non rationnel.

Ainsi si rx est rationnel alors r =0.

On a donc bien prouvé l'équivalence voulue.