Exercice I

1) $x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}$; $(E) : 11x^2 - 7y^2 = 5$

Si $(x;y)$ est solution de (E), alors $11x^2 - 7y^2 = 5$ et donc $11x^2 - 7y^2 \equiv 0\,[5]$ (Si deux entiers sont égaux alors ils sont congrus modulo 5 par exemple)
ou encore : $11x^2 \equiv 7y^2\,[5]$

Or $11 \equiv 1\,[5]$, donc $11x^2 \equiv x^2\,[5]$ par C.C.A.M

la transitivité de la relation de congruence : $x^2 \equiv 7y^2\,[5]$

Enfin, $7 \equiv 2\,[5]$, donc $7y^2 \equiv 2y^2\,[5]$ et toujours par transitivité on a que : $x^2 \equiv 2y^2\,[5]$.

2)

$x \equiv \ldots [5]$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv \ldots [5]$	0	1	4	4	1

$y \equiv \ldots [5]$	0	1	2	3	4
$2y^2 \equiv \ldots [5]$	0	2	3	3	2

Les restes possibles dans la D.E de $\begin{cases} x^2 \text{ par } 5 \text{ sont donc } 0 ; 1 \text{ ou } 4 \\ 2y^2 \text{ par } 5 \text{ sont donc } 0 ; 2 \text{ ou } 3 \end{cases}$

3) D'après 1) $x^2 \equiv 2y^2\,[5]$, donc x^2 et $2y^2$ ont même reste dans la D.E par 5.

Grâce à q.2, on a donc que $r = 0$ (r : reste dans la D.E de x^2 et $2y^2$ par 5).

Alors $5 | x$ et $5 | y$ (1^{er} colonne de chaque tableau), donc x et y sont des multiples de 5 : $x = 5k$ avec k entier $y = 5l$ avec l entier.

$x^2 = 25k^2$ et $y^2 = 25l^2$ (cela doit inciter à raisonner modulo $\underline{\underline{25}}$).

Si $(x;y)$ est solution de (E), alors $11x^2 - 7y^2 = 5$

Or $x^2 \equiv 0\,[25]$ et $y^2 \equiv 0\,[25]$

donc $11x^2 \equiv 0\,[25]$ donc $7y^2 \equiv 0\,[25]$

donc $\underbrace{11x^2 - 7y^2}_{\overset{\shortparallel}{5}} \equiv 0\,[25]$

donc $5 \equiv 0\,[25]$, donc $\underline{25 | 5 : \text{absurde}}$!

Ainsi il n'y a <u>aucun couple d'entiers solution de (E)</u> !

Exercice II

Affirmation 1 : vraie, simple application de la compatibilité de la congruence avec les puissances !

Affirmation 2 : « Si $3a \equiv 3b\ (6n)$, alors $a \equiv b\ (2n)$ ».

Vraie : Si $3a \equiv 3b\ (6n)$, alors $6n \mid 3a - 3b$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $3a - 3b = 6n \times k$

donc $3(a-b) = 6n \times k$

Donc $a - b = 2n \times k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc $2n \mid a - b$, donc $a \equiv b\ (2n)$.

Affirmation 3 : « $x^2 + x + 3 \equiv 0\ (5)$ » ssi $x \equiv 1\ (5)$.

Faux : Nous allons établir que si $x^2 + x + 3 \equiv 0\ (5)$, alors x n'est pas nécessairement congru à 1 modulo 5.

$\forall x \in \mathbb{Z}$, $x \equiv 0\ (5)$ ou $x \equiv 1\ (5)$ ou $x \equiv 2\ (5)$ ou $x \equiv 3\ (5)$ ou $x \equiv 4\ (5)$.

Faisons un tableau :

$x \equiv\ (5)$	0	1	2	3	4
$x^2 \equiv\ (5)$	0	1	4	4	1
$x+3 \equiv\ (5)$	3	4	0	1	2
$x^2+x+3 \equiv\ (5)$	3	0	1	0	3

Ainsi, $x^2 + x + 3 \equiv 0\ (5) \iff x \equiv 1\ (5)$ ou $x \equiv 3\ (5)$.

Faux :

$10 \equiv 10\ (15)$; $100 \equiv 10\ (15)$ car $100 = 15 \times 6 + 10$

Donc $1000 = 100 \times 10 \equiv 10 \times 10 \equiv 10\ (15)$.

$10^1 \equiv 10\ (15)$; $10^2 \equiv 10\ (15)$; $10^3 \equiv 10\ (15)$. $(*)$

Par récurrence, prouvons que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $10^n \equiv 10\ (15)$. Soit $\mathcal{S}(n)$ la propriété : $10^n \equiv 10\ (15)$.

L'initialisation a été vérifiée grâce à $(*)$.

Hérédité : Soit n un entier fixé non nul. Supposons que $\mathcal{S}(n)$ soit vraie, c'est-à-dire que $10^n \equiv 10\ (15)$.

Prouvons alors que $10^{n+1} \equiv 10\ (15)$.

Or, par hypothèse de récurrence, $10^n \equiv 10\ (15)$, donc $10^n \times 10 \equiv 10 \times 10\ (15)$ (compatibilité de $\equiv$ avec le produit).

donc $10^{n+1} \equiv 100\ (15)$ et $100 \equiv 10\ (15)$, donc $10^{n+1} \equiv 10\ (15)$, donc $\mathcal{S}(n+1)$ est vraie.

Ainsi, $\mathcal{S}(1)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{S}(n)$ est héréditaire, de sorte que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $10^n \equiv 10\ (15)$: le reste de la D.E de 10^{2016} par 15 vaut donc 10 (on emploie la propriété [illegible])

Affirmation 5 : « $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2^n - 1$ n'est jamais divisible par 9 ».

Faux : Contre-exemple : pour $n = 6$, $2^6 - 1 = 64 - 1 = 63$; or $63 = 9 \times 7$, donc $9 \mid 2^6 - 1$

Exercice III

Effectuons la D.E de n par 10 : il existe un unique couple d'entiers $(a;b)$ tel que : $n = 10a + b$ et $0 \leq b < 10$ et vu que b est entier cette dernière condition s'écrit : $0 \leq b \leq 9$.

1) $\mathcal{M}(13) = \{0 ; 13 ; 26 ; 39 ; 52 ; 65 ; 78 ; 91\}$.

2) $\Leftarrow$) : Si $a + 4b \equiv 0 [13]$, alors $a \equiv -4b [13]$ donc $10a \equiv -40b [13]$

Or $-40 \equiv -1 [13]$, donc $10a \equiv -b [13]$, donc $10a + b \equiv 0 [13]$, donc

Comme $n = 10a + b$, on a : $n \equiv 0 [13]$.

$\Rightarrow$) Supposons que $n \equiv 0 [13]$: alors comme $n = 10a + b$, $10a + b \equiv 0 [13]$.

Donc $4(10a + b) \equiv 4 \times 0 [13]$

$40a + 4b \equiv 0 [13]$.

Or $40 \equiv 1 [13]$, donc $40a \equiv a [13]$ et par suite, $40a + 4b \equiv 0 [13]$ s'écrit $a + 4b \equiv 0 [13]$.

Par double implication, on a bien établi que : $\boxed{n \equiv 0 [13] \Longleftrightarrow a + 4b \equiv 0 [13]}$

3) Grâce à q.2) : Un entier n est divisible par 13 si et seulement si son nombre de dizaines augmenté de quatre fois son chiffre des unités est divisible par 13.

4) $676 = 67 \times 10 + 6$: Ici $a = 67$ et $b = 6$: $67 + 4 \times 6 = 67 + 24 = 91$ et $91 = 13 \times 7$

donc oui 676 est un multiple de 13.

$943 = 94 \times 10 + 3$: $a = 94$ et $b = 3$, donc $a + 4b = 94 + 4 \times 3 = 106$.

Or $106 = 13 \times 8 + \boxed{2}$ Donc 106 n'est pas multiple de 13 tout comme 943.

Idem : 4652 non multiple de 13

156 556 non multiple de 13

Exercice IV

1) $m \geq 2$ et $A(m) = m^4 + 1$

Rappelons que le produit de deux entiers pair est pair et celui de deux entiers impairs est impair.

Si m est pair, alors m^4 est pair et m^4+1 est impair.

Si m est impair, alors m^4 est impair et m^4+1 est pair.

$\boxed{A(m) \text{ a donc la parité "contraire" à celle de } m}$

2) Soit $m \geq 2$: alors $m \equiv 0\,[3]$ ou $m \equiv 1\,[3]$ ou $m \equiv 2\,[3]$

Donc $m^4+1 \equiv 1\,[3]$ ou $m^4+1 \equiv 2\,[3]$ ou $m^4+1 \equiv \underbrace{2^4+1}_{17}\,[3] \equiv 2\,[3]$.

Donc $A(m) = m^4+1$ n'est jamais congru à 0 modulo 3, donc <u>$A(m)$ n'est jamais multiple de 3!</u>

3) Soit <u>d un diviseur de $A(m)$:</u> $A(m) \equiv 0\,[d]$.

Or, $A(m) = m^4+1$, donc $m^4+1 \equiv 0\,[d]$

donc $m^4 \equiv -1\,[d]$ C.C.A.S

donc $(m^4)^2 \equiv (-1)^2\,[d]$ C.C.A.P

donc $\boxed{m^8 \equiv 1\,[d]}$.

Exercice V

a) $3^{3n} = (3^3)^n = 27^n$.

Or $27 \equiv 1\,[13]$, donc par <u>compatibilité de la relation de congruence avec les puissances</u>

on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $27^n \equiv 1^n\,[13]$.

Or $1^n = 1$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $27^n \equiv 1\,[13]$, c'est-à-dire : $\boxed{3^{3n} \equiv 1\,[13]}$.

b) <u>$\forall n \in \mathbb{N}$</u>, $A = 3^{6n+2} + 3^{3n+1} + 1$.

$A = \left(3^{3n}\right)^2 \times 3^2 + 3^{3n} \times 3^1 + 1$ (cela les règles sur les puissances!)

Grâce à q.a), $3^{3n} \equiv 1\,[13]$ et par C.C.A.P et C.C.A.S on a :

$A \equiv 1 \times 3^2 + 1 \times 3 + 1\,[13]$ avec $1 \times 3^2 + 3 + 1 = 13$

et $13 \equiv 0\,[13]$

$\boxed{A \equiv 0\,[13]}$

Ce dernier résultat signifie que <u>A est multiple de 13.</u>

Exercice VI

1) $14x^2+7y^2=10^n \qquad x\in\mathbb{Z},\ y\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}$.

$7(2x^2+y^2)=10^n$.

Si $n=0$, alors $7(2x^2+y^2)=1$ avec $2x^2+y^2\in\mathbb{N}$, donc $7\mid 1$: impossible.

Si $n\neq 0$, alors en raisonnant modulo 7 : $14x^2\equiv 0\ (7)$ car $14\equiv 0\ (7)$ et $7\equiv 0\ (7)$.

Donc $14x^2+7y^2\equiv 0\ (7)$ (compatibilité de $\equiv$ avec l'addition).

Or, si $(x;y)\in\mathbb{Z}^2$ est solution de $(*)$, alors $14x^2+7y^2\equiv 10^n\ (7)$.

Par suite on aurait : $10^n\equiv 0\ (7)$ par transitivité de $\equiv$.

Ainsi $7\mid 10^n$, et donc $7\mid 10$: absurde ! En conclusion, $(*)$ n'a aucune solutions entières !

Le passage 7 divise 10^n implique 7 divise 10 s'appuie sur un résultat sur les nombres premiers non encore vu en cours (mais sans doute connu de tous ?) : si un nombre premier divise un produit de facteurs, alors il divise au moins un de ces facteurs.

Solution alternative :

$10^n \equiv 0[7]$. Or $10 \equiv 3[7]$, donc par compatibilité de la relation de congruence avec les puissances : $10^n \equiv 3^n[7]$, donc par transitivité de la relation de congruence : $3^n \equiv 0[7]$, donc $2^n \times 3^n \equiv 2^n \times 0[7], donc\ 6^n \equiv 0[7]$.

De là comme $6 \equiv -1[7], on\ aurait\ 6^n \equiv (-1)^n[7], et\ par\ transitivité :\ (-1)^n \equiv 0[7]$.

Or $(-1)^n \in$ {-1 ; 1}, donc $(-1)^n \equiv -1\ ou\ 1\ [7], et\ par\ transitivité -1 \equiv 0[7]\ ou\ 1 \equiv 0[7]\ ce\ qui\ est\ absurde$!

Exercice final

Au dernier coup à jouer, l'adversaire doit se retrouver en présence d'une seule allumette (39 auront donc dû être piochées). Donc à l'avant dernier coup, lorsque le joueur qui a commencé à jouer en premier joue son tour, il doit rester 2,3,4 ou 5 allumettes (et donc 38,37,36 ou 35 allumettes ont dû être extraites du jeu auparavant).

Cela signifie donc qu'au coup d'avant joué par l'adversaire, il restait 3,4,5 ou 6 allumettes dans le jeu (et donc 37,36,35 ou 34 allumettes ont été extraites du jeu en amont).

En raisonnant sur les allumettes piochées, si le premier joueur en prend 4 et qu'il complète* après chaque tour joué par l'adversaire à 5 le nombre d'allumettes prises en deux tours, celui de l'adversaire et le sien, (il le peut car il a commencé à jouer en premier et voit le nombre d'allumettes prises par son adversaire à chaque tour), le nombre d'allumettes piochées augmente de 5 en 5, il est donc de la forme 4 + 5k, où k va représenter le nombre de paires de tours joués après le premier coup, donc lorsque k = 7, on arrive à 39 allumettes piochées quand c'est au tour de l'adversaire à jouer qui perd donc la partie car contraint de prendre cette dernière.

On peut même dire que la partie se finira en 16 coups joués.

Voici la « martingale » gagnante à coup-sûr en commençant à jouer en premier !

* : le premier en prend 4 le premier coup. Si l'adversaire en prend une, alors le coup d'après celui qui a joué en premier en prend 5 – 1 = 4, si l'adversaire en prend deux, alors le 1° joueur en prend 5 – 2 =3, etc.

Ci-dessous, une solution brillante (infiniment meilleure que celle rédigée par mes soins qui reste heuristique), qui convainc de pourquoi on est obligé d'en prendre 4 au départ a été trouvée par Rémi L. Bravo à lui !

Excercice final : (Le meilleur).

Admettons que je commence, trouvons la stratégie gagnante. Je veux gagner donc il faut que l'adversaire prenne la dernière allumette.

Mettons cela sous formule mathématique :

- Soit $n \in \mathbb{N}$ correspondant au nombre de tours d'une partie. Un tour étant défini par l'adversaire le commençant puis moi le finissant.
- Soit $k \in \mathbb{N}$, correspondant au nombre d'allumettes que j'enlève au commencement de la partie car je la commence. Donc par définitions : $\boxed{1 \leq k \leq 4}$
- Soit $a \in \mathbb{N}$, correspondant au nombre moyen d'allum enlevé chaque tour, a est un entier donc cette moyenne l'est également, c'est pourquoi nous supposons que a reste constant au cours de la partie. Ceci est possible de manière pratique car je clôture chaque tour donc je décide de la valeur de a. De plus, pour que a reste constant au cours de la partie, il faut envisager l'ensemble des coups possibles que réalise l'adversaire : il peut en enlever au maximum 4 et je peux en enlever au minimum 1 et au maximum 4. Donc : $\boxed{5 \leq a \leq 8}$ Cela nous servi

Grâce à ces 3 variables : n ; k et a nous pouvons dire que pour que je gagne, il faut : $40 - k = an + 1$ car je clôture un tour, je commence la partie et il faut que l'adversaire prenne la dernière allumette.

Donc : $\boxed{39 - k = an}$

Afin d'élaborer une stratégie gagnante, trouvons a et k.

Lafadie-Gortier
Remy.

$k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq k \leq 4$. Donc : $k = 1$ ou $k = 2$ ou $k = 3$ ou $k = 4$.

Raisonnons par disjonction de cas :

- Si $k = 1$, alors : $38 = an$

  Or $\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(38) = \{1 ; 2 ; 19 ; 38\}$

  Donc : $an = 1 \times 38$ ou $an = 2 \times 19$.

  $\begin{cases} a = 1 \\ n = 39 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 38 \\ n = 1 \end{cases}$ OU $\begin{cases} a = 2 \\ n = 19 \end{cases}$ $\begin{cases} a = 19 \\ n = 2 \end{cases}$

  Or, $a \in [5 ; 8]$ donc $a \neq 1$ ou $a \neq 2$ ou $a \neq 19$ ou $a \neq 38$.

  Donc $S = \emptyset$

  Ainsi $\underline{k \neq 1}$.

- Si $k = 2$, alors : $37 = an$.

  Or, $\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(37) = \{1 ; 37\}$

  Donc : $an = 1 \times 37$

  $\begin{cases} a = 1 \\ n = 37 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 37 \\ n = 1 \end{cases}$

  Or, $a \in [5 ; 8]$ donc $a \neq 1$ ou $a \neq 37$.

  Donc : $S = \emptyset$

  Ainsi : $\underline{k \neq 2}$.

- Si $k = 3$, alors : $36 = an$

  Or, $\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(36) = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36\}$

  Donc : $an = 1 \times 36$ ou $an = 2 \times 18$ ou $an = 3 \times 12$ ou $an = 4 \times 9$

  $\begin{cases} a = 1 \\ n = 36 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 36 \\ n = 1 \end{cases}$ OU $\begin{cases} a = 2 \\ n = 18 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 18 \\ n = 2 \end{cases}$ OU $\begin{cases} a = 3 \\ n = 12 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 12 \\ n = 3 \end{cases}$ OU $\begin{cases} a = 4 \\ n = 9 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 9 \\ b = 4 \end{cases}$

  Or, $a \in [5 ; 8]$ donc : $a \neq 1$; $a \neq 36$; $a \neq 2$; $a \neq 18$; $a \neq 3$; $a \neq 12$; $a \neq 4$; $a \neq 9$

  Donc : $S = \emptyset$

  Ainsi : $\underline{k \neq 3}$

Donc : $k \neq 1$; $k \neq 2$; $k \neq 3$. Donc : $\boxed{k = 4}$ Oui

Ainsi : $35 = an$

Or, $\mathcal{D}_{\mathbb{N}}(35) = \{1 ; 5 ; 7 ; 35\}$ ✓

Donc : $an = 1 \times 35$ ou $an = 5 \times 7$

$\begin{cases} a = 1 \\ n = 35 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 35 \\ n = 1 \end{cases}$ OU $\begin{cases} a = 7 \\ n = 5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 5 \\ n = 7 \end{cases}$

Or, $a \in [5 ; 8]$ donc : $a \neq 1$; $a \neq 35$; $a \neq 7$.

Donc : $a = 5$ ou $a = 7$. Or, si lors d'un tour l'adversaire enlève 1 allumette, je ne pourrai rien faire pour que $a = 7$. Donc $a \neq 7$.

Ainsi : $a \in \{5\}$

Nous avons donc pour que je gagne :

$a = 5$ et $h = 4$.

Reciproquement : $39 \equiv 4 [5] \iff 39 - 4 = 5n$

Donc $\boxed{a = 5 \quad \text{et } h = 4}$

Donc pour gagner, il faut au commencement que j'enleve 4 allumettes puis que je fasse en sorte que $a = 5$.

- Soit $a_b \in [1;4]$, correspondant au nombre d'allumettes enlevées par l'adversaire au b-ième tour.
- Soit $g_b \in [1;4]$, correspondant au nombre d'allumettes que j'enleve au b-ieme tours.

Ainsi : $\forall b \in [1;n]$: $a_b + g_b = a = 5$

Donc : $\boxed{g_b = 5 - a_b}$

Pour conclure, il existe (bel et bien) une stratégie gagnante pour le joueur ayant commencé :

Il faut, au commencement de la partie enlever 4 allumettes. Puis, lorsque l'adversaire enleve une certaine quantité d'allumette, il faut enlever la difference entre 5 et la quantité precedemment enlevée par l'adversaire.
Et la victoire est à nous !