Exercice I

Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $L=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer les 16 produits suivants : I^2, IJ, IK, IL, JI, J^2, JK, JL, KI, KJ, K^2, KL, LI, LJ, LK et L^2.

__Aucune difficulté__ : $I^2=I$; $IJ = J$; $IK = O_2$; $IL = O_2$; $JI = O_2$; $J^2 = O_2$; $JK = I$; $JL = J$; $KI= K$

$K^2 = O_2$; $KL = O_2$; $LI = LJ = O_2$; $LK = K$; $L^2 = L$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels.

   a) Calculer les quatre produits : XA où $X\in\{I, J, K, L\}$.

__Facile__ : $IA = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $JA =\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $KA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $LA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$

   b) Calculer de même les quatre produits : AX, où $X\in\{I, J, K, L\}$.

__De même__ : $AI = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ $AJ = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$ $AK = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix}$ $AL = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

3) Démontrer que toute matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels est une combinaison linéaire des matrices I, J, K et L.

__Réponse__ : Soit A une matrice carrée d'ordre 2 à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+ b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+ c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+ d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = aI + bJ + cK + dL.$$

Donc A est une combinaison linéaire des matrices I, J, K et L.

4) Donner la matrice M carrée d'ordre 3, dont les coefficients m_{ij} sont définis par : $m_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{j} \text{ si } i < j \\ i + j \text{ si } i \geq j \end{cases}$.

__Réponse__ : $M = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 3 & 4 & \frac{2}{3} \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice II

<u>26</u> <u>page 237 :</u> $A = \begin{pmatrix} 2x^2 & 5y-4 \\ 0 & y^2-4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 18 & 3x+7 \\ 0 & 4x \end{pmatrix}$

$A = B \Longleftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 18 \\ 5y-4 = 3x+7 \\ y^2-4 = 4x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = \frac{6}{5} \\ \frac{36}{25} = -8 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ 12 = 12 \end{cases}$

Or, $\frac{36}{25} \neq -8$

Donc : $\boxed{A = B \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \end{cases}}$

34 page 237.

c) $A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0{,}1 & 20 \\ -5 & 16 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 13 & 45 & 8 \\ 10 & 10 & 0{,}2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 13 & 45 & 8 \\ 10 & 10 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0{,}1 & 20 \\ -5 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 & 450 & 80 \\ 201{,}3 & 204{,}5 & 4{,}8 \\ 95 & -225+160 & -40+3{,}2 \end{pmatrix}$$

Donc : $\boxed{AB = \begin{pmatrix} 130 & 450 & 80 \\ 201{,}3 & 204{,}5 & 4{,}8 \\ 95 & -65 & -36{,}8 \end{pmatrix}}$

43 page 238 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

a) $AA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$

$2A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$

Donc : $AA - 2A = \begin{pmatrix} 10-2 & 6-6 \\ 6-6 & 10-2 \end{pmatrix}$

$\boxed{AA - 2A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}}$

b) $AA - 2A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 8\, I_2$

Donc : $\boxed{A(A - 2I_2) = 8\, I_2}$

c) $A(A - 2I_2) = 8\, I_2$

Donc : $A\,\dfrac{(A - 2I_2)}{8} = I_2$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{8}(A - 2I_2) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Donc : $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}}$

52 page 239 $\quad (S) : \begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ -x + 2y + z = 4 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$

a) Donc : $(S) : AX = B$ avec : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Car : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - y + z = 7 \\ -x + 2y + z = 4 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \iff (S).$

Donc : $\boxed{(S) : \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}$

b) D'après la calculatrice : $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$

$(S) : AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow I_3X = A^{-1}B \Leftrightarrow \boxed{X = A^{-1}B}$

D'après la machine : $A^{-1}B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ Donc : $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [illegible] \end{pmatrix}$

Ainsi : $\boxed{(S) : \begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}}$

Exercice III

Exercice III : $A \in M_n(\mathbb{R})$; $B \in M_n(\mathbb{R})$ $n \in \mathbb{N}^*$

a) Supposons que A et B commutent, c'est-à-dire que : $\boxed{AB = BA}$

On a : $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + AB + AB + B^2$ car $AB = BA$.

Donc : $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

Ainsi, si A et B commutent, alors : $\boxed{(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2}$

b) Si A et B ne commutent pas, alors la relation précédente est fausse car $AB \neq BA$.

Donc : $\boxed{(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2}$

c) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$A + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc : $\boxed{(A+I_3)^2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 3 & 8 \\ 15 & 6 & 6 \\ 4 & 22 & 0 \end{pmatrix}}$

Exercice IV

Exercice III : $A = \begin{pmatrix}1 & 3 & -3\\ 3 & 1 & -3\\ 3 & 3 & -5\end{pmatrix}$

1) $A - I = \begin{pmatrix}0 & 3 & -3\\ 3 & 0 & -3\\ 3 & 3 & -6\end{pmatrix}$ et $A + 2I = \begin{pmatrix}3 & 3 & -3\\ 3 & 3 & -3\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}$

Donc : $(A-I)(A+2I) = \begin{pmatrix}0 & 3 & -3\\ 3 & 0 & -3\\ 3 & 3 & -6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 3 & -3\\ 3 & 3 & -3\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\boxed{(A-I)(A+2I) = 0_3}$

$\iff A^2 + A2I - IA - 2I^2 = 0_3 \iff A(A+I) = 2I$

$\iff A\dfrac{(A+I)}{2} = I \iff A \times \dfrac{1}{2}(A+I) = I.$

Donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{2}(A+I) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 3 & -3\\ 3 & 2 & -3\\ 3 & 3 & -4\end{pmatrix}$

$\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2}\\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -2\end{pmatrix}}$

Si $A - I$ était inversible alors il existerait une matrice $(A-I)^{-1}$ tel que : $(A-I)(A-I)^{-1} = I_3$. Or, $(A-I)(A+2I) = 0_3$

Donc en premultipliant par $(A-I)^{-1}$: $I(A+2I) = 0_3(A-I)^{-1}$

Et donc : $(A+2I) = 0_3$. Or, $A + 2I = \begin{pmatrix}3 & 3 & -3\\ 3 & 3 & -3\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix} \neq 0_3$.

Donc A – I non inversible.

De même, si $A+2I$ était inversible, alors il existerait une matrice $(A+2I)^{-1}$ telle que : $(A+2I)(A+2I)^{-1} = I_3$.

Or : $(A-I)(A+2I) = O_3$

Donc en postmultipliant par $(A+2I)^{-1}$: $(A-I)I_3 = O_3(A+2I)^{-1}$

Donc : $(A-I) = O_3$.

Or, $A - I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 3 & 3 & -6 \end{pmatrix} \neq O_3$.

Donc par l'absurde, la matrice $A-I$ n'est pas inversible.

2) Montrons par récurrence la propriété $P(n)$: $\exists (a_n ; b_n) \in \mathbb{R}^2, A^n = a_n I + b_n A$.

Etape d'initialisation : Pour $n = 0$: $A^0 = I = 1 \times I + 0 \times A$

Donc $P(0)$ est vraie avec $\boxed{a_0 = 1 \text{ et } b_0 = 0}$

Etape d'hérédité : Soit n un entier fixé tel que : $A^n = a_n I + b_n A$ avec a_n et b_n réels.

On a : $A^{n+1} = A A^n$

Donc d'après notre hypothèse de récurrence : $A^{n+1} = A(a_n I + b_n A)$.

Donc : $A^{n+1} = a_n A I + b_n A^2$.

Or, d'après 1) : $A^2 + A - 2I = 0 \iff A^2 = 2I - A$.

Donc : $A^{n+1} = a_n A + b_n (2I - A) = a_n A + 2b_n I - b_n A$.

Donc : $A^{n+1} = (a_n - b_n)A + 2b_n I$.

C'est-à-dire : $A^{n+1} = 2b_n I + (a_n - b_n)A$. Donc : $\boxed{a_{n+1} = 2b_n \; ; \; b_{n+1} = a_n - b_n}$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(0)$ est vraie et $P(n)$ est héréditaire à tout ordre.

Donc d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n ; b_n) \in \mathbb{R}^2, A^n = a_n I + b_n A}$

Exercice V

Supposons par l'absurde qu'au moins 2 matrices soient inversibles. Il se distingue alors 3 cas :

• Si A et B sont inversible alors il existe deux matrices A^{-1}, B^{-1} telles que : $AA^{-1} = I_3$ et $BB^{-1} = I_3$.

Or, on a : $ABC = 0_3$ donc : $B^{-1}A^{-1}ABC = 0_3$

Et donc : $B^{-1}BC = 0_3$

C'est-à-dire : $C = 0_3$.

Or, A, B et C ne sont pas nulles donc en particulier : $C \neq 0_3$.

Donc A n'est pas inversible ou B n'est pas inversible.

• De même si A et C sont inversibles, alors :

$ABC = 0_3 \Leftrightarrow A^{-1}ABC = 0_3 \Leftrightarrow BCC^{-1} = 0_3 \Leftrightarrow B = 0_3$

Or, B n'est pas nulle.

Donc A n'est pas inversible ou C n'est pas inversible.

• Enfin, si B et C sont inversibles alors :

$ABC = 0_3 = ABCC^{-1}B^{-1} = 0_3 \Leftrightarrow ABB^{-1} = 0_3 \Leftrightarrow A = 0_3$.

Or, A n'est pas nulle.

Donc B ou C ne sont pas inversible.

Donc dans tous les cas, au moins deux matrices ne sont pas inversibles.