Chapitre 6 — Trigonométrie et nombres complexes

I – Cocktail de formules de trigonométrie

Formules d'addition

Pour tous réels a et b :

♥♥♥ **cos(a–b)** $= cos(a)\times cos(b) + sin(a)\times sin(b)$ ♥♥♥

♥♥♥ **cos(a+b)** $= cos(a)\times cos(b) - sin(a)\times sin(b)$ ♥♥♥

♥♥♥ **sin(a–b)** $= sin(a)\times cos(b) - cos(a)\times sin(b)$ ♥♥♥

♥♥♥ **sin(a+b)** $= sin(a)\times cos(b) + cos(a)\times sin(b)$ ♥♥♥

Pour les curieux, d'où sortent ces horreurs et pourquoi énonce-t-on en premier les formules où apparaissent des soustractions ?

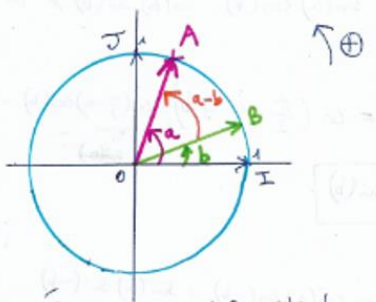
Preuve :

Rappels sur le produit scalaire du plan :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *non nuls du plan, on a* : ♥♥♥ $\vec{u}.\vec{v} =$ ♥♥♥

Si de plus on est dans un repère ***orthonormé du plan*** $(O;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, *et si* $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$, *alors* :

♥♥♥ $\vec{u}.\vec{v} =$ ♥♥♥



Soit a et b deux réels quelconques, A le point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OA}) = a$ et B le point du cercle trigo. tel que $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OB}) = b$.

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = OB \times OA \times \cos(\overrightarrow{OB}\,;\,\overrightarrow{OA}) = OB \times OA \times \cos(a-b)$.

Or OA = OB = 1, donc on a : $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = \cos(a-b)$. (*)

De plus, dans le repère orthonormé (O ; $\overrightarrow{OI}$; $\overrightarrow{OJ}$) : A($cos(a)$; $sin(a)$) et B($cos(b)$; $sin(b)$).

Donc : $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OA} = xx' + yy' = cos(b)cos(a) + sin(b)sin(a)$. (**).

Enfin, par commutativité des réels, on a au vu de (*) et (**) :

$\boxed{cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)}$.

En observant que : $a + b = a - (-b)$, il vient :

$cos(a+b) = cos(a-(-b)) = cos(a)cos(-b) + sin(a)sin(-b)$.

Or $cos(-a) = cos(a)$ et $sin(-b) = -sin(b)$, donc : $\boxed{cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)}$.

Pour la troisième relation :

Soit x appartenant à $\mathbb{R}$. On applique la relation 1) à : $a = \frac{\pi}{2}$ *et* $b = x$:

$cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(\frac{\pi}{2})\cos(x) + \sin(\frac{\pi}{2})\sin(x) = \sin(x)$.

Donc pour tout réel x :

♥♥$\boldsymbol{cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)}$ et en affectant à x la valeur $\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ on a aussi : $\boldsymbol{sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)}$♥♥.

Soit $x = a - b$:

$sin(a-b) = cos(\frac{\pi}{2} - (a-b)) = cos(\frac{\pi}{2} - a + b) = cos(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b) = cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) - sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\sin(b)$.

Donc $\boxed{sin(a-b) = sin(a)cos(b) - cos(a)sin(b)}$.

Enfin la dernière relation :

$sin(a+b) = sin(a-(-b)) = sin(a)cos(-b) + cos(a)sin(-b) = sin(a)cos(b) - cos(a)sin(b)$.

Comment mémoriser ces relations d'usage courant post bac ?

On retiendra que **le cosinus** ***ne mélange pas les blocs (= produit de deux cos puis produit de deux sin),*** mais ***change les signes***, et que le **sinus** ***mélange les blocs*** mais ***ne change pas les signes.***

Pour le cosinus : *coco ± sisi* : (*bloc de cos suivi de bloc de sin et signe contraire entre les deux blocs de celui qui est dans la parenthèse du cos de la somme initiale*).

Pour le sinus : *sico ± cosi* : (*mélange sincos ± cossin avec entre les deux blocs la même opération que celle dans la parenthèse du sin de la somme initiale*).

En particulier, lorsque dans les relations d'additions, on fait : $a = b = x$, on obtient les relations suivantes appelées formules de duplication :

Formules de duplication

Pour tout réel x, on a : ♥♥♥ $\boldsymbol{cos(2x) = 2cos^2(x) - 1 = 1 - 2sin^2(x) = cos^2(x) - sin^2(x)}$ ♥♥♥

Pour tout réel x, on a : ♥♥♥ $\boldsymbol{sin(2x) = 2sin(x) \times cos(x)}$ ♥♥♥

Preuve : $cos(2x) = cos(x+x) = cos(x)\times cos(x) - sin(x)\times sin(x)$ d'après la seconde formule d'addition.

$\boxed{cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x)}$. Or d'après la relation de Pythagore trigonométrique, $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$ donc $sin^2(x) = 1 - cos^2(x)$, de sorte que : $\boxed{cos(2x)} = cos^2(x) - (1 - cos^2(x)) = \boxed{2cos^2(x) - 1}$.

La relation $\boxed{cos(2x) = 1 - 2sin^2(x)}$ s'obtient avec Pythagore en remplaçant cette fois-ci $cos^2(x)$ par $1 - sin^2(x)$.

a) $sin(2x) = sin(x + x) = sin(x)\, cos(x) + cos(x)\, sin(x)$ d'après la quatrième formule d'addition.

$\boxed{sin(2x) = 2sin(x)cos(x)}$ car $sin(x)cos(x) = cos(x)sin(x)$: le produit de réels est commutatif !

Exercice 1

1) En observant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, déterminer la valeur exacte de $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et celle de $sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2) Donner la valeur exacte de $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$. En déduire celle de $sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

✂---

Exercice 2

Démontrer que pour tout réel x, $cos(x)+cos(x+\frac{2\pi}{3}) + cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$.

On admet de même que : $sin(x)+sin(x-\frac{2\pi}{3}) + sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$.

✂---

Exercice 3

1) Déduire des formules d'addition les relations suivantes appelées relations de factorisations :

Pour tout réel p et q :

$cos(p) + cos(q) = 2cos\left(\frac{p+q}{2}\right) cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

$cos(p) - cos(q) = -2sin\left(\frac{p+q}{2}\right) sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

$sin(p) + sin(q) = 2sin\left(\frac{p+q}{2}\right) cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

$sin(p) - sin(q) = 2sin\left(\frac{p-q}{2}\right) cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$.

2) Résoudre dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ l'équation : $sin(2x) - sin(3x) + sin(4x) = 0$.

Exercice 4

On appelle fonction tangente la fonction définie, lorsque $cos(x) \neq 0$ par : $tan(x) = \frac{sin\,(x)}{cos\,(x)}$.

Soient a et b des réels tels que : a, b, et $a + b$ ne sont pas congrus à $\frac{\pi}{2}$ modulo π.

1) Etablir que $\tan(a + b) = \frac{\tan(a)+\tan\,(b)}{1-\tan(a)\tan\,(b)}$.

2) En déduire une formule de duplication de la tangente, puis la valeur exacte de $tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

✂---

II- Propriétés des arguments d'un nombre complexe non nul.

Soient z et z' deux nombres complexes non nuls ayant pour écriture trigonométrique :

$z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ et $z' = r'(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$

Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes zz' et $\frac{z}{z'}$ (où z'≠0)

On obtient :

- $zz' =$

- $\frac{z}{z'} =$

En se souvenant que deux nombres complexes non nuls sont égaux si et seulement si : ils ont le même module et des arguments congrus modulo 2π on obtient :

Des propriétés déjà connues sur les modules :

- $|zz'| =$
- $\left|\frac{z}{z'}\right| =$

Et surtout, de nouvelles propriétés sur les arguments :

♥♥♥***Propriétés des arguments***♥♥♥

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls et tout entier naturel $n \geqslant 1$:

- $\arg(zz') =$
- $arg(z^n) =$
- $arg\left(\frac{1}{z}\right)$
- $arg\left(\frac{z}{z'}\right) =$
- Dans un repère orthonormé direct du plan, si A, B et C sont rois points deux à deux distincts d'affixes respectives z_A , z_B et z_C, alors on a : $arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$=

Preuve :

✂---

Exercice 6

Sur la figure ci-contre, le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct (O ; U ; V).
Les points A, B, C, D et E sont situés sur des nœuds du quadrillage et ont pour affixe respective z_A, z_B, z_C, z_D et z_E.
Placer les points F, G, H, K et L d'affixe :

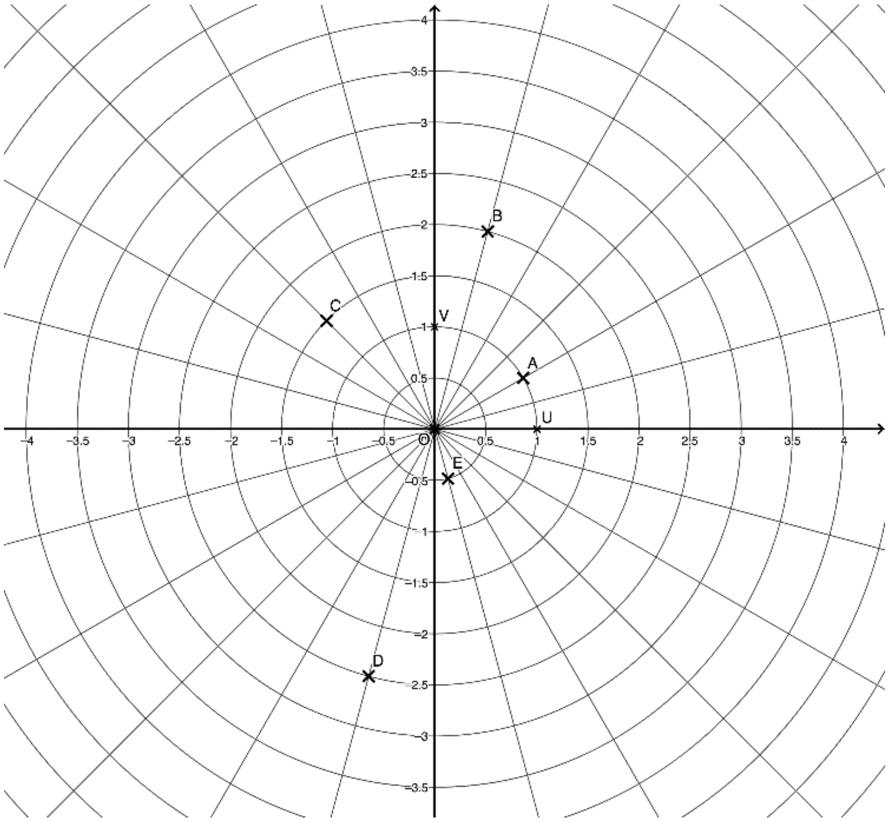
F($z_A \times z_B$)

G($z_B \times z_C$)

H$\left(\frac{z_B}{z_A}\right)$

K$\left(\frac{z_C}{z_E}\right)$

L=($z_D \times z_B$)



✂--

Exercice 7

Soit $z = 2\sqrt{3} - 2i$ et $z' = -1+i$.

1) Déterminer le module et l'argument principal de z et z'.
2) En déduire le module et un argument des nombres complexes suivants :

$a = iz$; $b = zz'$; $c = z'^2$; $d = \frac{-2}{z}$; $e = \frac{z^6}{z'^4}$

✂--

Exercice 8

Déterminer puis construire dans un repère orthonormé direct l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

1) $arg\left(\frac{z-1+i}{z-2-3i}\right) = 0[2\pi]$.

2) $arg\left(\frac{z+i}{z-2}\right) = \pi[2\pi]$.

3) $arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = \frac{\pi}{2}[\pi]$.

✂--

Exercice 9

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z + 5 = 0$.
2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$ on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 1 + 2i$, $z_B = \overline{z_A}$, $z_C = 1 + \sqrt{3} + i$ et $z_D = \overline{z_C}$.

a) Construire les points A et B.
b) Déterminer la forme algébrique du nombre complexe : $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$.
c) En déduire la nature du triangle ABC.
d) Démontrer que A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
e) Construire en justifiant, les points C et D.

✂---

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On considère les points A, B, C et D distincts d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D tels que :

$$\begin{cases} z_A + z_C = z_B + z_D \\ z_A + \mathrm{i}z_B = z_C + \mathrm{i}z_D \end{cases}$$

Démontrer que le quadrilatère ABCD est un carré.

✂---

Exercice 11

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u}\,;\vec{v})$.

A tout point M d'affixe z, avec $z \neq 2 - i$, on associe le point M' d'affixe $z' = f(z) = \frac{z-i}{z-2+i}$.

a) Déterminer l'affixe du point A' associé au point A d'affixe $1+i$.
b) Déterminer le point M dont l'affixe est l'antécédent de i par f.
c) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dont l'image par f appartient au cercle unité.
d) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit réel. Idem avec z' imaginaire pur.

✂---

II- Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul.

Définissons la fonction f, sur $\mathbb{R}$, et à valeurs dans $\mathbb{C}$ par la relation : $f(\theta) = cos(\theta) + i \times sin(\theta)$.

Nous allons voir que cette fonction admet des propriétés qui font penser à celle de la fonction exponentielle :

a) En se servant de ce qu'on a fait au début du paragraphe II, on a :

- Pour tous réels θ et θ', $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$.

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que combinaison linéaire de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Calculer $f\,'(\theta)$, et en déduire que pour tout réel θ, $f\,'(\theta) = i \times f(\theta)$.

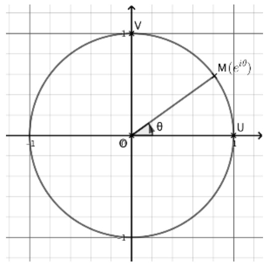
c) que vaut $f(0)$?

Les propriétés établies ci-dessus sont identiques à celles de la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par :

Pour tout réel x, et pour tout réel k, $g(x) = e^{kx}$. En effet :

On admet que l'on peut « *prolonger* » à $\mathbb{C}$ la notation exponentielle, en adoptant l'écriture suivante qui est due au mathématicien suisse Euler (aux environ de 1750) : $\boldsymbol{e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)}$.

Leonhard Euler (1707-1783)



__Définition__ : ♥♥♥ Pour tout ***réel*** θ : $\boxed{\boldsymbol{e^{i\theta}} = \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$ ♥♥♥

♥♥♥ $e^{i\theta}$ est donc le nombre complexe dont le module est égal à ……, et dont un argument est ….♥♥♥

<u>En effet</u> :

Le cercle trigonométrique, noté $\mathscr{C}$ peut donc être défini comme suit : $\mathscr{C} = \{e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}\}$.

__Exemples__

$e^{i\pi} =$ $\qquad$ $e^{i\frac{\pi}{2}} =$ $\qquad$ $e^{i0} =$ $\qquad$ $e^{-i\frac{\pi}{2}} =$

$e^{i\frac{2\pi}{3}} =$

<u>Propriétés utiles de $\boldsymbol{e^{i\theta}}$</u>

♥♥♥

- Pour tout réel θ, $|e^{i\theta}| = \ldots\ldots$, et $arg(e^{i\theta}) = \ldots\ldots.$

- Pour tous réels θ et θ', $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = \ldots\ldots\ldots$

- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\quad$ et $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = \ldots\ldots\ldots$

- Pour tout entier relatif n, et pour tout réel θ, $(e^{i\theta})^n = \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

-Pour tout réel θ et tout entier relatif k, $e^{i(\theta+2k\pi)} = \cdots$

- Pour tous réels θ et θ' : $\boldsymbol{e^{i\theta} = e^{i\theta'}}$ si et seulement si :

__Preuve__ : Tout cela est quasiment évident. Pourquoi ?

Rappel

Tout nombre complexe $z \neq 0$ peut s'écrire sous sa forme trigonométrique $z = |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ avec $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$

On peut alors l'écrire sous la forme : $z = |z|\, e^{i\theta}$.

Définition

Soit z un nombre complexe non nul, $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$.

♥♥♥L'écriture : $z = r\, e^{i\theta}$ est appelée une ***forme exponentielle*** de z. ♥♥♥

Remarque cruciale : L'intérêt de la forme exponentielle, c'est qu'elle va permettre de ***nettement simplifier les calculs sur les complexes, surtout en présence de produit, puissances et quotients***, et ce, grâce aux différentes propriétés de l'exponentielle.

Exemples

1) Ecrire sous forme exponentielle : $z_1 = 4\sqrt{3} + 4i$; $z_2 = ie^{i\frac{\pi}{6}}$.
2) En déduire une forme exponentielle de $\frac{z_1^3}{z_2}$.
3) Déterminer tous les entiers relatifs n tels que z_1^n soit réel.
4) Donner la forme exponentielle de $z_3 = -2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.
5) Quelle est la forme exponentielle de : $z = \sin(\theta) - i\cos(\theta)$, où θ est réel.

✂---

Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Justifier.

(i) On considère le nombre complexe : $a = (-\sqrt{3} + i)^{19}$. *Affirmation* : " a est imaginaire pur".

(ii) Soit z un nombre complexe de module 1. *Affirmation* : " $z^2 + \frac{1}{z^2}$ est un nombre réel".

✂---

II- Des formules célèbres

a) Les formules d'Euler

Formules d'Euler :

Pour tout réel θ, ♥♥♥ $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ ♥♥♥ et ♥♥♥ $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ ♥♥♥

Preuve :

Exercice 12

1) Rappeler l'identité remarquable donnant le développement de $(a-b)^3$.

2) Exprimer, pour tout réel x, $sin^3(x)$ *en fonction de* $\sin(x)$ *et* $\sin(3x)$.

On dit qu'on a linéarisé $sin^3(x)$, *c'està dire qu'on l'a écrit sans puissance.*

3) En déduire une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = sin^3(x)$.

Au chapitre calcul intégral, on verra que cette façon de faire est très classique et présente en analyse.

✂---

Exercice 13

Quelle est la forme exponentielle de : $z = e^{i\theta} + 1$ où $\theta \in]-\pi;\pi]$. On retiendra bien la technique de l'angle moitié rencontrée dans cet exercice.

✂---

b) La formule de Moivre

On a déjà vu que pour tout réel θ et tout entier n, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

Nous allons voir que la formule de Moivre (Abraham Moivre, mathématicien français 1667-1754)

n'est en fait qu'une réécriture de cette relation.

Formule de Moivre

♥♥♥Pour tout réel θ et tout entier n, $(cos(\theta) + isin(\theta))^n =$ ♥♥♥

Exemples d'utilisation

1) Retrouver les formules de duplication à partir de la formule de Moivre.
2) Déterminer tous les entiers naturels n tels que : $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n = \left(1-i\sqrt{3}\right)^n$.

✂---

Exercice 14

Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives a et b.

ABC est un triangle équilatéral direct, s'il est équilatéral et que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

1) Montrer que ABC est équilatéral direct si et seulement si l'affixe c du point C vérifie : $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2) On note j le nombre complexe égal à $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

a) Combien vaut j^3 ? Et $1 + j + j^2$? Exprimer $e^{i\frac{\pi}{3}}$ en fonction de j.

b) En déduire que ABC est équilatéral direct si et seulement si : $a + bj + cj^2 = 0$.

c) De même, ABC est équilatéral indirect si et seulement si : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) = \frac{-\pi}{3}\,[2\pi]$.

Par un raisonnement similaire à ceux effectués aux questions 1) et 2), on obtient sans peine :

ABC est équilatéral indirect si et seulement si : $a + bj^2 + cj = 0$.

Démontrer que ABC est équilatéral si et seulement si : $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

3) Un triangle équilatéral peut-il avoir les affixes de ses trois sommets toutes les trois entières ?
4) Un triangle équilatéral peut-il avoir ses trois sommets avec des affixes dont les parties réelles et imaginaires sont toutes entières ?

Exercice 15

1 Calculer De célèbres sommes trigonométriques

On considère un nombre réel x et n un entier naturel non nul. On cherche à trouver une expression explicite des sommes :

$C = 1 + \cos(x) + \cos(2x) + \ldots + \cos(nx)$ et

$S = \sin(x) + \sin(2x) + \ldots + \sin(nx)$.

1. Exprimer $C + \mathrm{i}S$ comme une somme d'exponentielles complexes.

2. En utilisant la somme des termes d'une suite géométrique, en déduire que, pour tout nombre réel x ne s'écrivant pas sous la forme $x = 2k\pi$ (k entier relatif),

$$C + \mathrm{i}S = \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}.$$

3. En factorisant respectivement par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}$ et par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+1)x}{2}}$, démontrer que :

d'une part $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = -2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

et d'autre part

$1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x} = -2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+1)x}{2}} \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$.

4. Prouver alors que, pour tout réel x ne s'écrivant pas sous la forme $x = 2k\pi$ (k entier relatif), on a

$$C + \mathrm{i}S = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{nx}{2}} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

5. En remarquant que C est la partie réelle et S la partie imaginaire de $C + \mathrm{i}S$, en déduire la solution du problème.

6. Étudier le cas où x s'écrit sous la forme $x = 2k\pi$ (k entier relatif).

7. Applications : n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a. Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \cos\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

b. Démontrer que :

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \ldots + \sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}.$$

III-Exercices issus de baccalauréat

Exercice 1 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ d'unité 2 cm. On appelle f la fonction qui, à tout point M, distinct du point O et d'affixe un nombre complexe z, associe le point M' d'affixe z' tel que

$$z' = -\frac{1}{z}.$$

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = -1 + \mathrm{i}$ et $z_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

a. Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point A′ image du point A par la fonction f.

b. Déterminer la forme exponentielle de l'affixe du point B′ image du point B par la fonction f.

c. Sur la copie, placer les points A, B, A′ et B′ dans le repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. Pour les points B et B′, on laissera les traits de construction apparents.

2. Soit r un réel strictement positif et θ un réel. On considère le complexe z défini par $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

a. Montrer que $z' = \frac{1}{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi-\theta)}$.

b. Est-il vrai que si un point M, distinct de O, appartient au disque de centre O et de rayon 1 sans appartenir au cercle de centre O et de rayon 1, alors son image M' par la fonction f est à l'extérieur de ce disque ? Justifier.

3. Soit le cercle Γ de centre K d'affixe $z_{\mathrm{K}} = -\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

a. Montrer qu'une équation cartésienne du cercle Γ est $x^2 + x + y^2 = 0$.

b. Soit $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y non tous les deux nuls. Déterminer la forme algébrique de z' en fonction de x et y.

c. Soit M un point, distinct de O, du cercle Γ. Montrer que l'image M' du point M par la fonction f appartient à la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 2

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n, par

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right) z_n.$$

On note A_n le point d'affixe z_n dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ de l'annexe 2.
L'objet de cet exercice est d'étudier la construction des points A_n.

1. a. Vérifier que $1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.
   b. En déduire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.
2. a. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$z_n = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\frac{\pi}{6}}.$$

   b. Pour quelles valeurs de n, les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?
3. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.
   a. Interpréter géométriquement d_n.
   b. Calculer d_0.
   c. Montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \left(1 + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{3}\right)(z_{n+1} - z_n).$$

   d. En déduire que la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique puis que pour tout entier naturel n,

$$d_n = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n.$$

4. a. Montrer que pour tout entier naturel n,

$$|z_{n+1}|^2 = |z_n|^2 + d_n^2.$$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, le triangle $\mathrm{O}A_nA_{n+1}$ est rectangle en A_n.

   c. Construire, à la règle non graduée et au compas, le point A_5 sur la figure de l'annexe 2 à rendre avec la copie.
   d. Justifier cette construction.*