Chapitre 2 *Nombres complexes : point de vue algébrique.*

Introduction

Au XVI[e] siècle, des mathématiciens italiens apprennent à résoudre les équations du troisième degré, en les ramenant à des équations du second degré dont la résolution est connue depuis le IX[e] siècle grâce aux mathématiciens arabes (Al-Khwârizmî). Au cours de cette recherche vont apparaître progressivement au cours des siècles les nombres complexes.

Nicolo Tartaglia (1499/1500 – 1557), italien

Girolamo Cardano (1501 – 1576), italien (nommé Jérôme Cardan en français)

Rafaele Bombelli (1526 – vers 1572), italien

Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (vers 780-850), persan

Dans $\mathbb{R}$, l'équation $x^2 = -1$ n'a pas de solution.

Les mathématiciens ont inventé au début du dix-neuvième siècle un ensemble de nombres appelés nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, dans lequel cette équation admet des solutions. On notera i une des solutions de cette équation.

i n'est donc pas un nombre réel. Pourquoi ?

i est appelé nombre imaginaire.

A-L'ensemble des nombres complexes.

On admet qu'il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, dont les éléments sont appelés nombres complexes qui a les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
- Il existe un nombre complexe noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe z s'écrit sous la forme unique : $z = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{b}$ ou encore : $z = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{i}$, où $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont des ***nombres réels***.
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent les mêmes règles que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.

Exemples

$2 + 3i$; $-1{,}3+5{,}4i$; 0 ; $-2i$; $\frac{7}{3}+i$; $\sqrt{2}-\frac{1}{7}i$ sont des nombres complexes.

Définition et vocabulaire

Soit z un nombre complexe.

♥♥♥L'écriture $\boldsymbol{z = a + ib}$ (où $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sont des réels) est appelée la ***forme algébrique de z*** (ou encore ***l'écriture algébrique* de** z). ♥♥♥

♥ **Le réel *a*** est appelé la ***partie réelle de z*** ; on notera $\boldsymbol{a = Re(z)}$. (Lire la partie réelle de z). ♥

♥ **Le réel *b*** est appelé la ***partie imaginaire de z*** ; on notera $\boldsymbol{b = Im(z)}$. (Lire la partie imaginaire de z). ♥

-Lorsque♥ $\boldsymbol{a = Re(z) = 0}$, on dit que ***z est imaginaire pur***. ♥

-Lorsque♥ $\boldsymbol{b = Im(z) = 0}$, ***z est réel.*** ♥

Remarque : la ***partie réelle*** et la ***partie imaginaire*** d'un nombre complexe ***sont des nombres réels.***

Exemples

Soit $z = 2 + 5i$. Alors $2 + 5i$ est la forme algébrique de z, et $Re(z) =$ et $Im(z) =$

Soit $z = 2 - i$. Déterminer $Re(z)$ et $Im(z)$.

Soit $z = 5$. Déterminer $Re(z)$ et $Im(z)$.

Soit $z = -8i$. Déterminer sa partie réelle et sa partie imaginaire.

B-Règles de calcul avec les nombres complexes

Les règles opératoires et théorèmes (distributivité, double distributivité, identités remarquables, théorème du produit nul …) que vous connaissez concernant les nombres réels restent valables pour les nombres complexes.

Enfin, deux nombres complexes z et z' sont égaux si, et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire :

$$z = z' \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}$$

En particulier, un nombre complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont égales à 0.

Par exemple : si $z = a + ib$ avec a et b réels, $z = -3 + i\pi$ si et seulement si …………………..

Exercice 1

Calculer les expressions suivantes, en donnant le résultat sous forme algébrique :

1) $(5 + 2i) + (7 - 5i) =$

2) $-4 + 11i - (2 - 3i) =$

3) $4(3 + i) - 2(7 - 8i) =$

4) $(2 + 3i) \times (5 + 4i) =$

5) $(8 - 6i)(2 - 3i) =$

6) $(4 - 5i) \times (4 + 5i) =$

7) $(5 + 3i)^2 =$

8) $(8 - i)^2 =$

9) $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$

10) $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 =$

11) On pose $z = 3 + i$, et $z' = 2 - 4i$.

Donner la forme algébrique de : *a)* $2z - 5iz'$; *b)* zz' ; *c)* z'^2.

12) Déterminer tous les nombres complexes z tels que $z^2 = -1$.

13) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, i^n.

14) Vrai ou faux : justifier.

Pour tous nombres complexes z et z' :

a) « $Re(z+z') = Re(z) + Re(z')$ et $Im(z+z') = Im(z) + Im(z')$ ».

b) « $Re(zz') = Re(z) \times Re(z')$ ».

c) « Si k est un nombre réel, alors $Im(kz) = k\,Im(z)$ ».

✂--

Remarque : On a vu que les règles de calculs dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

Pour autant, on sait comparer deux nombres réels, mais comparer deux nombres complexes est une aberration.

Pourquoi ?

Si l'on pouvait comparer (au sens de la relation de comparaison des nombres réels) les nombres complexes, en particulier, on pourrait comparer i et 0 :

JAMAIS d'inégalités avec les nombres complexes !!!

C- Conjugué d'un nombre complexe et applications

Définition : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, avec a et b réels.

Le conjugué de z, que l'on note $\bar{z}$, est le nombre complexe défini par : $\bar{z} =$ ....

Pour " fabriquer " $\bar{z}$, on conserve donc la partie réelle de z, et on oppose sa partie imaginaire.

Exemples :

1) Déterminer le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 1 - 4i$; $z_3 = 5i$; $z_4 = -2$

2) Si z est un nombre complexe, à quoi est égal $\bar{\bar{z}}$?

Propriété utilisant le conjugué

Soit z un nombre complexe.

1) z est réel si et seulement si ....

2) z est imaginaire pur si et seulement si ....

3) Si $z = a + ib$ avec a et b réels, alors $z \times \bar{z} =$ ....

En particulier, le produit $z \times \bar{z}$ est toujours un nombre ....

Preuve :

✂---

Exercice 2

Déterminer tous les nombres complexes z tels que $z^2 + \bar{z}$ soit un nombre réel.

✂---

D – Division dans $\mathbb{C}$

a) Inverse d'un nombre complexe non nul.

Soit z un nombre complexe non nul. L'inverse de z est le nombre complexe z' tel que : $zz' = 1$.

On note $\frac{1}{z}$ l'inverse de z.

Exemple : Montrer que $z = 3 + 4i$ admet un inverse et le déterminer sous forme algébrique.

b) *Division dans* $\mathbb{C}$

Définition : Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes, avec $z_2 \neq 0$.

Le quotient de z_1 par z_2 est le nombre complexe noté $\frac{z_1}{z_2}$ avec $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{1}{z_2}$

Exemples et technique importante

Donner l'écriture algébrique de $z = \frac{2-i}{3+4i}$

Technique à retenir ♥♥: Pour déterminer l'écriture algébrique d'un quotient $\frac{z_1}{z_2}$ de deux nombres complexes, il suffit de ……………………………………………………………………………………………
……..

Exercice 3

1) Déterminer la forme algébrique de : $z = \frac{1-i}{2i}$; $z' = \frac{1+i}{1-i}$

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : *a)* $2z + 3 - i = iz + 5$; *b)* $\frac{z+i}{z-i} = 3i$; *c)* $\frac{iz}{z-i} = z$.

d) $2z + \bar{z} = 1 - 4i$; *e)* $z^2 + z\overline{z} = 2$.

3) Résoudre le système suivant dans $\mathbb{C}^2$: $\begin{cases} 2z + z' = 3 \\ iz + (1-i)z' = -1 \end{cases}$.

4) Vrai ou faux : justifier : L'équation : $z^3 + z + 1 = 0$ n'a aucune solution imaginaire pure.

✂--

E) Conjugué et opérations algébriques

Propriétés

Pour tous nombres complexes z, z_1 et z_2 et pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$\overline{z_1 + z_2} =$	$\overline{z_1 \times z_2} =$	$\overline{z^n} =$	Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} =$	Si $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} =$

Preuve :

✂--

Exemple

Donner l'écriture algébrique du conjugué de z, dans chacun des cas suivants :

a) $z = (2-i)+(5+2i)$; *b)* $z = (2-i)(5+2i)$; *c)* $z = (1+2i)^3$; *d)* $z = \frac{1}{2-3i}$; e) $z = \frac{2-4i}{3+5i}$.

Exercice 4

Pour tout nombre complexe $z \neq i$, on considère le nombre complexe $Z = \frac{z+i}{z-i}$.

En utilisant la caractérisation des nombres réels par la propriété du conjugué, déterminer tous les nombres complexes z pour lesquels Z est un nombre réel.

✂--

Exercice 5

A tout nombre complexe $z = x + iy$ avec x et y réel, on associe le nombre complexe, noté $f(z)$ défini par :
$f(z) = iz^2 + z$

a) Ecrire sous forme algébrique $f(z)$ en fonction de x et y.
b) Démontrer que si z est imaginaire pur, alors $f(z)$ est imaginaire pur.
c) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z pour lesquels $f(z)$ est imaginaire pur. La réciproque de l'affirmation de la question *b*) est-elle vraie ou fausse ?

✂--

Exercice 6

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z, associe son image : $f(z) = z^2 + 2z + 9$.

a) Calculer l'image de $-1+i\sqrt{3}$ par f.

b) Si on pose $z = x + iy$, avec x et y réels, donner l'écriture sous forme algébrique de $f(z)$.

c) Quels sont les nombres complexes qui ont une image réelle par f ?

✂--

Exercice 7

Démontrer que pour tout entier naturel n, le nombre $z = (1+i)^n + (1-i)^n$ est un nombre réel.

✂--

Exercice 8

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes, avec z_2 non nul.

1) Montrer qu'en règle générale, $Re(\frac{z_1}{z_2}) \neq \frac{\mathrm{Re}(z_1)}{\mathrm{Re}(z_2)}$.
2) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z_1 et z_2 pour que $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\mathrm{Re}(z_1)}{\mathrm{Re}(z_2)}$.

✂--

F- Equations du second degré dans $\mathbb{C}$ à coefficients réels

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes, en détaillant votre démarche :

a) $x^2 = 16$; *b)* $x^2 = -4$; *c)* $x^2 + 12 = 0$.

✂--

Propriété importante

♥♥

Soit (E) l'équation : $\boldsymbol{az^2 + bz + c = 0}$, où a, b et c sont trois **réels** avec a non nul et z l'inconnue.

$\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant associé à cette équation.

-Si $\Delta > 0$, alors l'équation (E) admet, dans $\mathbb{C}$, ***deux solutions réelles distinctes*** qui sont :

$z_1 =$ et $z_2 =$

-Si $\Delta = 0$, alors (E) admet, dans $\mathbb{C}$, ***une unique solution*** qui est le ***réel*** $\boldsymbol{z} =$

-Si $\Delta < 0$, alors (E) admet, ***dans*** $\mathbb{C}$ ***, deux solutions complexes conjuguées*** :

$z_1 =$ et $z_2 =$

♥♥

Remarque : cela prolonge ce que vous avez vu en première qui reste vrai :

Dans $\mathbb{R}$, si $\Delta < 0$, alors (E) n'admet aucune solution réelle.

D'où ***la nécessité impérieuse de préciser dans quel ensemble de nombres on résout une équation*** !

Démonstration :

Nous allons procéder de la même façon que l'année dernière avec les polynômes du second degré : utiliser la forme canonique. La nouveauté apparaitra bien sûr lorsque le discriminant sera négatif.

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-b^2 + 4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$$

$$Ainsi, \quad az^2 + bz + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \quad car\ a \neq 0.$$

Comme $\Delta = b^2 - 4ac$, on obtient alors :

$$az^2 + bz + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$Si\ \Delta > 0, \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \Leftrightarrow z - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \ \ ou \ \ z - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ou \quad z = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Donc, si $\Delta > 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ *admet* ***deux solutions réelles distinctes :***
$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *et* $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$Si\ \Delta = 0, \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow z + \frac{b}{2a} = 0 \ \Leftrightarrow z = -\frac{b}{2a}$$

Donc, si $\Delta = 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ *admet* ***une unique solution réelle :*** $z_0 = -\frac{b}{2a}$

$$Si\ \Delta < 0, \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{i^2|\Delta|}{4a^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right) = 0 \qquad \Leftrightarrow \left(z - \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right)\left(z - \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow z - \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 0 \ \ ou \ \ z - \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad ou \quad z = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Donc, si $\Delta < 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ *admet* ***deux solutions complexes, non réelles, distinctes et conjuguées*** *:*

$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ *et* $z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Remarque : si $\Delta < 0, alors\ |\Delta| = -\Delta$, donc on peut encore réécrire les deux solutions précédentes en :

Exemples

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

a) $z^2 + z + 1 = 0$; *b*) $z^2+5z+6 = -z^2+4z+4$.

c) $2z^3 + z = 0$.

d) $z^2 = 5 - 4i$.   *e*) $z^4 - 2z^2 - 8 = 0$.

Remarque

Comme vu l'an dernier, dans le cas où $\Delta \neq 0$, si on note z_1 et z_2 les racines de l'équation : $az^2+bz+c=0$, on a toujours :

$z_1 + z_2 = \ldots\ldots$ et $z_1 \times z_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

De sorte que si on trouve une racine évidente de l'équation du second degré, en appliquant l'une des deux relations précédentes de son choix, on obtient l'autre racine de l'équation.

Exemple

Trouver une racine évidente de l'équation : $2z^2+3z - 5 = 0$, et en déduire l'autre racine de cette équation.

Exercice 9

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geqslant 0$ par la donnée de z_0, où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}.$$

/smallskip

1. **a.** Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.
   b. Dans cette question, on suppose que $z_0 = \mathrm{i}$. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.
   c. Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné. Que peut-on conjecturer pour les valeurs prises par z_{3n} selon les valeurs de l'entier naturel n ?
   Prouver cette conjecture.
2. Déterminer z_{2016} dans le cas où $z_0 = 1 + \mathrm{i}$.
3. Existe-t-il des valeurs de z_0 tel que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas ?*

Voici une devinette mathématique pour finir en beauté ce chapitre :

Quel est le nombre le plus laid ?

Réponse : C'est -1.

Expliquer pourquoi !

Appendice : une construction rigoureuse de l'ensemble $\mathbb{C}$.

1 Le corps des complexes

1.1 Construction de $\mathbb{C}$

Nous supposerons dans ce chapitre que nous connaissons parfaitement l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels muni de ses deux opérations usuelles : $+$; son addition et $\times$; sa multiplication.
Partant de là, nous allons construire le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, c'est-à-dire justifier qu'un tel ensemble existe avec toutes ses propriétés.

On définit sur $\mathbb{R}^2$ deux opérations $\oplus$ et $\otimes$ en posant, pour tous (a,b), $(a',b') \in \mathbb{R}^2$

$$(a,b) \oplus (a',b') = (a+a', b+b') \text{ et } (a,b) \otimes (a',b') = (aa'-bb', ab'+ba').$$

Par définition l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux opérations est noté $\mathbb{C}$ et ses éléments sont appelés les nombres complexes.

Remarquons que pour tous $a, a' \in \mathbb{R}$, $(a,0) \oplus (a',0) = (a+a',0)$ et $(a,0) \otimes (a',0) = (aa',0)$. Ces deux égalités montrent que l'addition $\oplus$ et la multiplication $\otimes$ agissent sur les couples de la forme $(a,0)$, où $a \in \mathbb{R}$, comme l'addition $+$ et la multiplication $\times$ agissent sur $\mathbb{R}$. C'est pour cette raison qu'il est légitime d'identifier un réel $a \in \mathbb{R}$ avec le complexe $(a,0) \in \mathbb{C}$. Cette identification permet de considérer $\mathbb{R}$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$.

Par cette identification, pour tous $a, a' \in \mathbb{R}$,

$$a \oplus a' = (a,0) \oplus (a',0) = (a+a',0) = a+a' \text{ et } a \otimes a' = (a,0) \otimes (a',0) = (a \times a', 0) = a \times a'.$$

Ces égalités montrent que les opérations $\oplus$ et $\otimes$ généralisent à $\mathbb{C}$ les opérations usuelles $+$ et $\times$ que nous connaissons sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent, nous noterons, sans risque d'ambiguïté, $+$ l'opération $\oplus$ et $\times$ l'opération $\otimes$.

Par l'identification précédente, nous avons choisi de noter $1 = (1,0) \in \mathbb{C}$. Nous décidons de noter à présent $i = (0,1) \in \mathbb{C}$.
Il vient alors que

$$i^2 = (0,1) \times (0,1) = (-1,0) = -1.$$

Soit $z = (a,b) \in \mathbb{C}$. Alors $z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = (a,0) + ((0,1) \times (b,0)) = a + ib$.
De plus, cette écriture est unique car si $z = a + ib = a' + ib'$ alors, par le calcul précédent, $z = (a,b) = (a',b')$ puis $a = a'$ et $b = b'$. Ces deux dernières remarques permettent de légitimer la définition qui suit.

Définition A : Forme algébrique, Parties réelle et imaginaire

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \exists! a, b \in \mathbb{R} \ / \ z = a + ib.$$

L'écriture $z = a + ib$ est appelée la forme algébrique du complexe z.
Les **réels** a et b sont respectivement appelés partie réelle et partie imaginaire de z et on note $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

Les théorèmes qui suivent sont immédiats de part la construction de $\mathbb{C}$ et des définitions des lois $+$ et $\times$.

Théorème 1

– Deux complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.
– Un complexe est nul si, et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.
– Un complexe est réel si, et seulement si, sa partie imaginaire est nulle.
– Un complexe est imaginaire pur si, et seulement si, sa partie réelle est nulle.

Théorème 2

$\forall z, z' \in \mathbb{C}$,

– $\operatorname{Re}(z+z') = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Re}(z')$,
– $\operatorname{Im}(z+z') = \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(z')$,
– $\operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z') - \operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(z')$,
– $\operatorname{Im}(zz') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z') + \operatorname{Im}(z)\operatorname{Re}(z')$.

1.2 Propriétés usuelles sur $\mathbb{C}$

Notre construction de $\mathbb{C}$ est achevée, il reste à démontrer les propriétés usuelles de $+$ et $\times$ sur $\mathbb{C}$. Soient $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$ et $z'' = a'' + ib'' \in \mathbb{C}$.

— **Commutativité de $+$:** En utilisant la commutativité de $+$ sur $\mathbb{R}$, il vient

$$z + z' = (a,b) + (a',b') = (a+a', b+b') = (a'+a, b'+b) = (a',b') + (a,b) = z' + z.$$

— **Commutativité de $\times$:** En utilisant la commutativité de $+$ et de $\times$ sur $\mathbb{R}$, il vient

$$z \times z' = (a,b) \times (a',b') = (aa' - bb', ab' + ba') = (a'a - b'b, a'b + b'a) = (a',b') \times (a,b) = z' \times z.$$

— **Associativité de $+$:** En utilisant l'associativité de $+$ sur $\mathbb{R}$, il vient

$$\begin{aligned} z + (z' + z'') = (a,b) + ((a',b') + (a'',b'')) &= (a,b) + (a'+a'', b'+b'') \\ &= (a + (a'+a''), b + (b'+b'')) \\ &= ((a+a') + a'', (b+b') + b'') \\ &= (a+a', b+b') + (a'',b'') \\ &= ((a,b) + (a',b')) + (a'',b'') = (z+z') + z''. \end{aligned}$$

— **Associativité de $\times$:** En utilisant les propriétés de calculs usuels sur $\mathbb{R}$, il vient

$$\begin{aligned} z \times (z' \times z'') &= (a,b) \times ((a',b') \times (a'',b'')) \\ &= (a,b) \times (a''a' - b''b', a''b' + b''a') \\ &= (a(a''a' - b''b') - b(a''b' + b''a'), a(a''b' + b''a') + b(a''a' - b''b')) \\ &= (aa''a' - ab''b' - ba''b' - bb''a', aa''b' + ab''a' + ba''a' - bb''b') \\ &= ((aa' - bb')a'' - (ab' + ba')b'', (aa' - bb')b'' + (ab' + ba')a'') \\ &= (aa' - bb', ab' + ba') \times (a'', b'') \\ &= ((a,b) \times (a',b')) \times (a'',b'') = (z \times z') \times z''. \end{aligned}$$

— **Distributivité de $\times$ par rapport à $+$:** Par distributivité de $\times$ par rapport à $+$ sur $\mathbb{R}$, il vient

$$\begin{aligned}(z+z')\times z'' &= ((a,b)+(a',b'))\times(a'',b'')\\ &= (a+a',b+b')\times(a'',b'')\\ &= ((a+a')a''-(b+b')b'',(a+a')b''+(b+b')a'')\\ &= (aa''+a'a''-bb''-b'b'',ab''+a'b''+ba''+b'a'')\\ &= (aa''-bb'',ab''+ba'')+(a'a''-b'b'',a'b''+b'a'')\\ &= (a,b)\times(a'',b'')+(a',b')\times(a'',b'')\\ &= z\times z''+z'\times z''.\end{aligned}$$

De même, on montre que $z\times(z'+z'')=z\times z'+z\times z''$.

— **Neutralité de 0 pour $+$:** Par neutralité de 0 pour $+$ sur $\mathbb{R}$, il vient

$$z+0=(a,b)+(0,0)=(a+0,b+0)=(a,b)=z \text{ et } 0+z=z.$$

— **Neutralité de 1 pour $\times$:** Par neutralité de 1 pour $\times$ sur $\mathbb{R}$, il vient

$$z\times 1=(a,b)\times(1,0)=(a\cdot 1-b\cdot 0,1\cdot b+a\cdot 0)=(a,b)=z \text{ et } 1\times z=z.$$

— **Inverse pour $+$:** On pose $-z=(-1)\times z$ l'opposé de z. Il vient

$$z-z=(a,b)-(1,0)\times(a,b)=(a,b)-(1\cdot a-0\cdot b,a\cdot 0+b\cdot 1)=(a,b)-(a,b)=(0,0)=0.$$

De même, $-z+z=0$.

— **Inverse pour $\times$:** Si z est non nul, on pose $\frac{1}{z}=\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$ l'inverse de z. Il vient

$$\begin{aligned}z\times\frac{1}{z} &= (a,b)\times\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)\\ &= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2},\frac{-ab}{a^2+b^2}+\frac{ba}{a^2+b^2}\right)=(1,0)=1.\end{aligned}$$

De même, $\frac{1}{z}\times z=1$.