BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session Blanche _ vendredi 7 février 2025 (14h-18h)

Lycée Alphonse BENOIT – L'Isle-sur-la-Sorgue

Spécialité Mathématiques

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 16

SUJET

L'usage de la calculatrice en <u>mode examen</u> uniquement est autorisé.

Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Ce sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Exercice 1 – 5 points

Entre 1998 et 2020 en France, 18 221 965 accouchements ont été recensés, parmi lesquels 293 898 ont donné naissance à des jumeaux et 4 921 ont donné naissance à au moins trois enfants.

1) Avec une précision de 0,1 % calculer parmi tous les accouchements recensés, le pourcentage d'accouchements donnant naissance à des jumeaux sur la période 1998-2020.

2) Vérifier que le pourcentage d'accouchements qui ont donné naissance à au moins trois enfants est inférieur à 0,1 %.
On considère alors que ce pourcentage est négligeable.

On appelle accouchement ordinaire, un accouchement donnant naissance à un seul enfant.
On appelle accouchement double, un accouchement donnant naissance à exactement deux enfants.
On considère dans la suite qu'un accouchement est soit ordinaire, soit double.
La probabilité d'un accouchement ordinaire est égale à 0,984 et celle d'un accouchement double est alors égale à 0,016.
Les probabilités calculées dans la suite seront arrondies au millième.

On admet qu'un jour donné dans une maternité, on réalise n accouchements.
On considère que ces n accouchements sont indépendants les uns des autres.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'accouchements doubles pratiqués ce jour.

3) Dans le cas où n = 20 :

a) Préciser la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et donner ses paramètres.

b) Calculer la probabilité qu'on réalise exactement un accouchement double ce jour. On détaillera le calcul.

4) Par le méthode de votre choix que vous expliciterez, déterminer la plus petite valeur de n telle que $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5) Dans cette maternité, parmi les naissances doubles, on estime qu'il y a 30 % de jumeaux monozygotes (appelés « vrais jumeaux » qui sont obligatoirement de même sexe : deux garçons ou deux filles) et donc 70 % de jumeaux dizygotes (appelés « faux jumeaux » qui peuvent être de sexes différents : deux garçons ou deux filles ou un garçon et une fille).
Dans le cas de naissances doubles, on admet que, comme pour les naissances ordinaires, la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à 0,49 et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à 0,51.
Dans le cas d'une naissance double de jumeaux dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau-né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né.
On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les événements suivants :

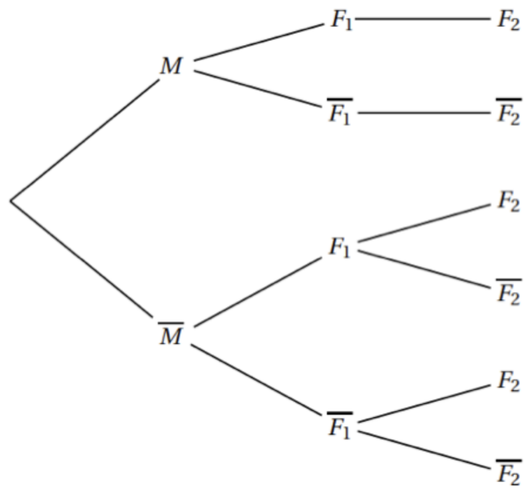
- M : « les jumeaux sont monozygotes »
- F_1 : « le premier nouveau-né est une fille »
- F_2 : « le second nouveau-né est une fille »

On notera $P(A)$ la probabilité de l'événement A et $\overline{A}$ l'événement contraire de l'événement A.

a) Recopier puis compléter l'arbre pondéré ci-contre.

b) Montrer que la probabilité que les deux nouveau-nés soient des filles est 0,315 07.

c) Les deux nouveau-nés sont des jumelles. Calculer la probabilité qu'elles soient monozygotes.



Exercice 2 – 5 points

Partie A :
Le but de la partie A est d'étudier le comportement de la suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n).$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x(1 - x)$$

1) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$.

2) On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$.

a) Calculer u_1.

b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4) Justifier que la limite de la suite (u_n) est égale à $\frac{1}{2}$.

Partie B :
Le but de cette partie est d'étudier un modèle d'évolution d'une population.
En 2022, cette population compte 3 000 individus.
On note P_n l'effectifs en milliers de la population l'année $2022 + n$. Ainsi $P_0 = 3$.

Selon un modèle inspiré du modèle de Verhulst, mathématicien belge du XIX$^{\text{e}}$ siècle, on considère que, pour tout entier naturel n :

$$P_{n+1} - P_n = P_n\,(1 - b \times P_n), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

1) Dans cette question $b = 0$.

a) Justifier que la suite (P_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) Déterminer la limite de P_n.

2) Dans cette question $b = 0{,}2$.

a) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 0{,}1 \times P_n$.

Calculer v_0 puis montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n(1 - v_n)$.

b) Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.

Exercice 3 – UNIQUEMENT POUR LE GROUPE DE M. MANCINI **4 points**

VRAI OU FAUX ?

Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, en justifiant votre réponse.
Toute réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

AFFIRMATION 1 : Le nombre réel b défini par b = $\ln(9) + \ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \ln\left(\frac{1}{e^{2\ln(3)}}\right)$ est égal à $\frac{1}{2}\ln(3)$.
AFFIRMATION 2 : 9 est le plus petit entier à partir duquel $\frac{4}{2+e^{-2n}} > 1{,}999$
AFFIRMATION 3 : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x) - x^2 + 2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$
AFFIRMATION 4 : L'équation $x\ln(x) = -1$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Exercice 3 – UNIQUEMENT POUR LES GROUPES DE M. HAEZEBAERT ET M. VIALLE

4 points

VRAI OU FAUX ?

Déterminer si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse, en justifiant votre réponse.
Toute réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

Dans une repère $(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath}\,;\ \vec{\jmath}\,;\ \vec{k})$ de l'espace on considère les points A(2 ; 1 ; –4) ; B(6 ; –5 ; 4) et les droites d_1 et d_2 de représentations paramétriques $d_1 : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -3 - 4t \\ z = 5 + t \end{cases}$ où t ∈ ℝ et $d_2 : \begin{cases} x = 7 + t' \\ y = 2 + 3t' \\ z = -6 + t' \end{cases}$ où t' ∈ ℝ

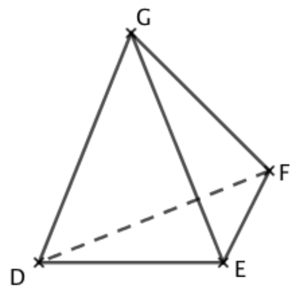
AFFIRMATION 1 : Le point A appartient à la droite d_1.

AFFIRMATION 2 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 10 - 10t \\ y = -11 + 15t \\ z = 12 - 20t \end{cases}$ où t ∈ ℝ.

AFFIRMATION 3 : Les droites d_1 et d_2 sont sécantes.

Soit DEFG un tétraèdre. On considère les points M et N définis par :

$$\overrightarrow{\mathrm{GM}} = 2\overrightarrow{\mathrm{GD}} + 4\overrightarrow{\mathrm{GE}} + 2\overrightarrow{\mathrm{GF}} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{DN}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DE}} + \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{DF}}$$



AFFIRMATION 4 : Les points G, M et N sont alignés.

Exercice 4 – 6 points

Un chaîne suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction g_a définie sur [–1 ; 1] par :

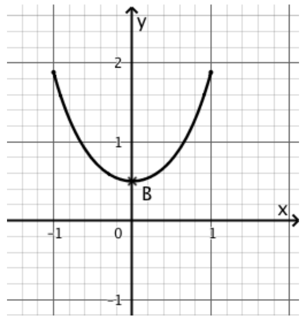
$$g_a(x) = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax})$$

où a est un paramètre réel strictement positif.

Partie A :

Dans le repère ci-contre, on donne la courbe représentative de la fonction g_a sur l'intervalle [–1 ; 1] pour une valeur de a fixée.

Cette courbe passe par le point B de coordonnées (0 ; 0,5).



1) Déterminer la valeur de a.

2) Démontrer que, pour tout réel a strictement positif, la tangente à la courbe de g_a au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

Partie B :

On montre que pour cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation : $(x-1)e^{2x} - 1 - x = 0$.

Dans la suite, on définit sur $[0\,;\,+\infty[$ la fonction f par $f(x) = (x-1)e^{2x} - 1 - x$.

1)a) Calculer $f'(x)$ l'expression de la fonction dérivée de la fonction f et montrer que $f'(x) = (2x-1)e^{2x} - 1$.

b) Justifier que $f'(0) = -2$.

c) Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.

2) On note f'' la dérivée de f'. Vérifier que pour tout réel $x \geq 0$, $f''(x) = 4x\,e^{2x}$.

En déduire les variations de f' sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

3) Démontrer que, sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution nommée α.

Déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de α arrondie au centième.

4) a) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. On ne cherchera pas ici à déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) En déduire que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,\alpha]$.

c) Calculer f(2).

En déduire que sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, la fonction f s'annule pour une unique valeur.

Si l'on note a cette valeur, donner un encadrement à 10^{-2} près de a.

5) a) Étudier la convexité de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

b) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 1.

c) En déduire que pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) \geq (e^2 - 1)x - e^2 + 1$.

d) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.