Terminale Maths Groupe 1 ***Devoir surveillé numéro 9*** ***27 Janvier 2025***

> ***Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats : -0,5 sinon.***
>
> ***Règle de bon sens : si je bloque à une question, j'y passe au maximum 5 minutes dessus, puis j'admets le résultat demandé et poursuis l'exercice !***

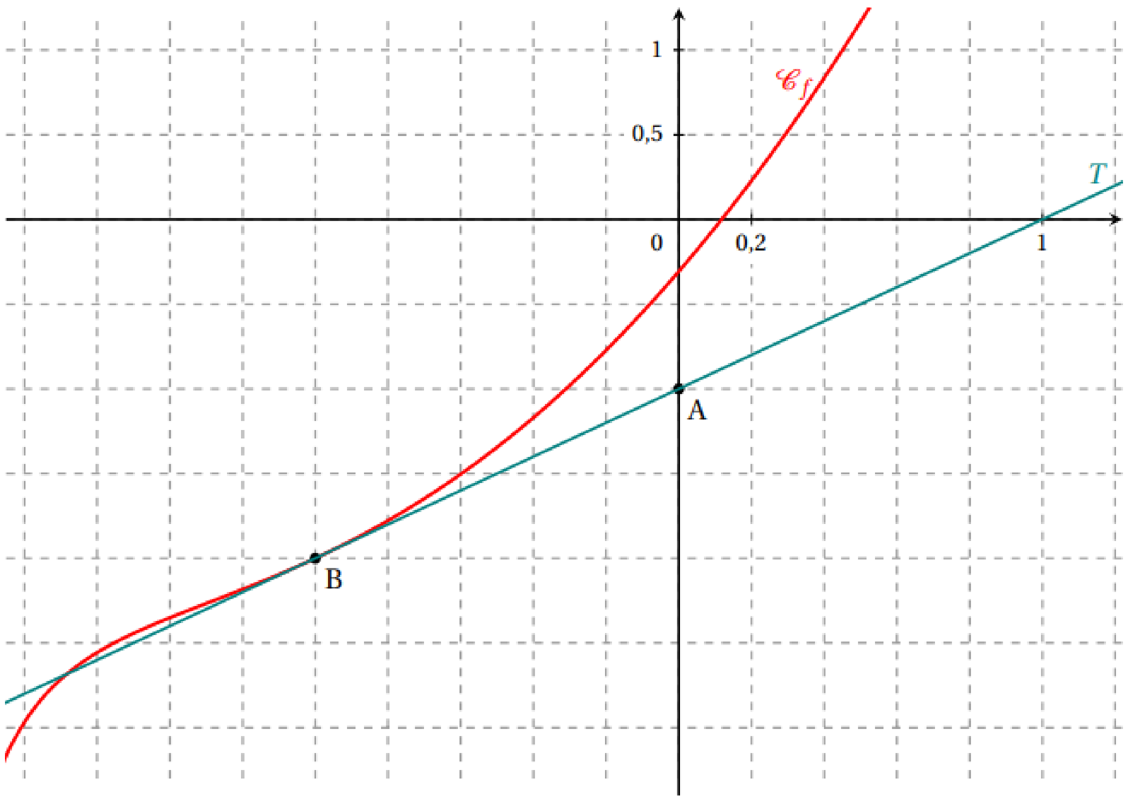
Exercice d'échauffement **(1 *point*)**

Soit (u_n) la suite définie par : pour tout entier naturel n, $u_n = 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$

Déterminer, par le calcul, à partir de quel rang, noté n_0, on a : $u_n \leqslant 10^{-9}$.

Exercice I **(9 *points*)**

On considère une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan, f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et sa tangente T au point B d'abscisse -1.
On précise que la droite T passe par le point A$(0\,;\,-1)$.



Partie A : exploitation du graphique.

À l'aide du graphique, répondre aux questions ci-dessous.

1. Préciser $f(-1)$ et $f'(-1)$.

2. La fonction f est-elle convexe sur son ensemble de définition ? Justifier.

3. Conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ et donner une valeur arrondie à 10^{-1} près d'une solution.

Partie B : étude de la fonction f

On considère que la fonction f est définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 + \ln(x+2),$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

1. Déterminer par le calcul la limite de la fonction f en -2. Interpréter graphiquement ce résultat.

   On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Montrer que pour tout $x > -2$, $\quad f'(x) = \dfrac{2x^2+6x+5}{x+2}$.

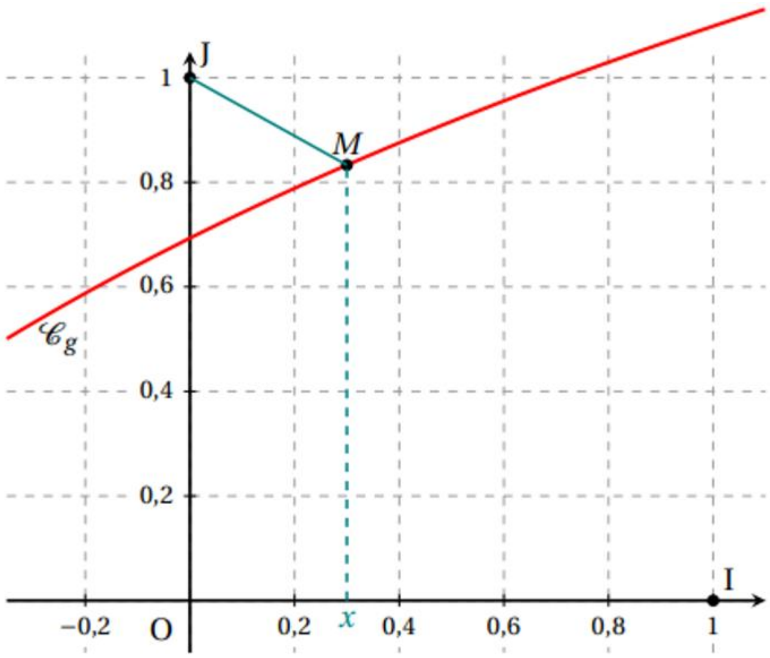
3. Étudier les variations de la fonction f sur $]-2\,;\,+\infty[$ puis dresser son tableau de variations complet.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2\,;\,+\infty[$ et donner une valeur arrondie de α à 10^{-2} près.

5. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-2\,;\,+\infty[$.

Partie C : une distance minimale.

Soit g la fonction définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $\quad g(x) = \ln(x+2)$.
On note $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (0 ; I , J), représentée ci-après.
Soit M un point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse x.
Le but de cette partie est de déterminer pour quelle valeur de x la distance JM est minimale.
On considère la fonction h définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $\quad h(x) = \text{J}M^2$.



1. Justifier que pour tout $x > -2$, on a : $h(x) = x^2 + [\ln(x+2) - 1]^2$.

2. On admet que la fonction h est dérivable sur $]-2\ ;\ +\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

   On admet également que pour tout réel $x > -2$,

$$h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$$

   où f est la fonction étudiée en **partie B**.

   a. Dresser le tableau de variations de h sur $]-2\ ;\ +\infty[$.
   Les limites ne sont pas demandées.

   b. En déduire que la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est α où α est le nombre réel défini à la question **4.** de la **partie B**.

3. On notera M_α le point de $\mathscr{C}_g$ d'abscisse α.

   a. Montrer que $\ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2$.

   b. En déduire que la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α et la droite (JM_α) sont perpendiculaires.

   On pourra utiliser le fait que, dans un repère orthonormé, deux droites sont perpendiculaires lorsque le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

Exercice III (10 *points*)

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - x\ln(x).$$

On admet que f est deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la fonction dérivée de la fonction f'.

Partie A : Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
2. Pour tout réel x strictement positif, calculer $f'(x)$.
3. Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f''(x) = \frac{2x-1}{x}.$$

4. Étudier les variations de la fonction f' sur $]0\ ;\ +\infty[$, puis dresser le tableau des variations de la fonction f' sur $]0\ ;\ +\infty[$.

   On veillera à faire apparaître la valeur exacte de l'extremum de la fonction f' sur $]0\ ;\ +\infty[$.

5. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

6. Etudier la convexité de f sur $]0\,;\,+\infty[$, en précisant les coordonnées de son point d'inflexion.

Partie B : Étude d'une fonction auxiliaire pour la résolution de l'équation $f(x) = x$

On considère dans cette partie la fonction g définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par

$$g(x) = x - \ln(x).$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, on note g' sa dérivée.

1. Pour tout réel strictement positif, calculer $g'(x)$, puis dresser le tableau des variations de la fonction g.
   Les limites de la fonction g aux bornes de l'intervalle de définition ne sont pas attendues.
2. On admet que 1 est l'unique solution de l'équation $g(x) = 1$.
   Résoudre, sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, l'équation $f(x) = x$.

Partie C : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = f(u_n) = u_n^2 - u_n \ln(u_n).$$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

2. Justifier que la suite (u_n) converge.
   On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que ℓ vérifie l'égalité $f(\ell) = \ell$.
3. Déterminer la valeur de ℓ.

4.

a. Recopier et compléter le script ci-dessous écrit avec Python afin qu'il renvoie en sortie la valeur du plus petit entier n à partir de laquelle $u_n > x$, où x est un réel supérieur ou égal à 0.

```
from math import*
def seuil(x):
    u=0.5
    n=0
    while .........:
        n=n+1
        u=..........
    return(n)
```

b. Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on saisit : seuil(0,99) dans la console Python.

c. Si l'on tapait seuil(1) dans la console Python, qu'elle serait la valeur renvoyée ?

Justifier très brièvement.