Sujet A : *Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats* : -0,5 *sinon.*

Règle de bon sens : si je bloque à une question, j'y passe au maximum 5 minutes dessus, puis j'admets le résultat demandé et poursuis l'exercice !

Exercice I (17 *points*)

Partie A : *Etude d'une fonction*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + e^{-2x}$.

a) Déterminer, en justifiant, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ainsi que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Etablir que pour tout réel x, la dérivée seconde de f est égale à : $f''(x) = 2(1+2e^{-2x})$.

c) En déduire que f est convexe sur $\mathbb{R}$ puis donner le sens de variation de f' sur $\mathbb{R}$.

d) Donner, sans justifier, $\lim_{x\to-\infty} f'(x)$ puis $\lim_{x\to+\infty} f'(x)$. Dresser le tableau de variation de f' sur $\mathbb{R}$.

e) Démontrer avec soin que l'équation : $f'(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on notera α.

f) Donner, en explicitant votre méthode, un encadrement de α à 10^{-2} près.

g) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

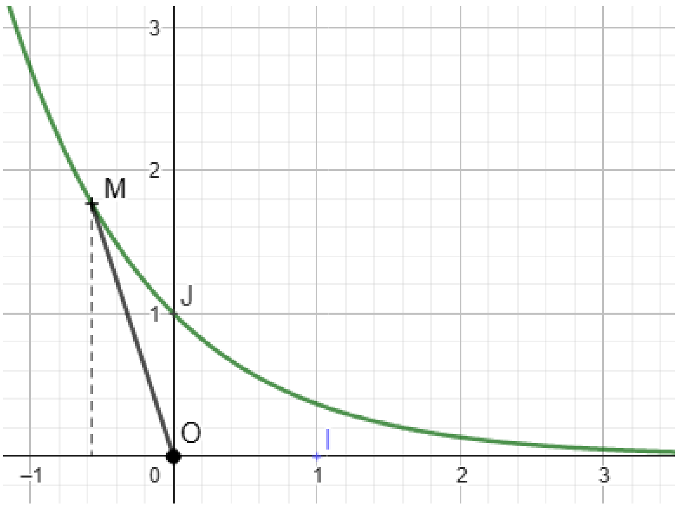
h) Etablir que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$, puis prouver que ce minimum égal à $\alpha(\alpha + 1)$.

Partie B : *Recherche d'une distance minimale*

On se place dans un repère orthonormé (O ; I ; J).

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{-x}$.

Soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$. On définit alors la fonction g sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \text{OM}$, où OM désigne la distance entre les points O et M. Le graphique ci-joint résume la situation :



a) Etablir que $g(x) = \sqrt{f(x)}$ où f est la fonction définie à la partie A.

b) Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$. Les limites ne sont ici pas attendues.

c) En déduire que parmi tous les points situés sur $\mathcal{C}$, il en existe un unique situé le plus proche possible de O. On notera A ce point dont on précisera les coordonnées, en valeur exacte.

Exercice II **(3 *points*)**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. **a.** Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. On admet que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$. Déterminer le sens de variation de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variation en y faisant figurer les limites.

3.

Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Sujet B **:** ***Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats : -0,5 sinon.***

Règle de bon sens : si je bloque à une question, j'y passe au maximum 5 minutes dessus, puis j'admets le résultat demandé et poursuis l'exercice !

Exercice I **(17 *points*)**

Partie A* : *Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + e^{-4x}$.

a) Déterminer, en justifiant, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ ainsi que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Etablir que pour tout réel x, la dérivée seconde de f est égale à : $f''(x) = 2(1+8e^{-4x})$.

c) En déduire que f est convexe sur $\mathbb{R}$ puis donner le sens de variation de f' sur $\mathbb{R}$.

d) Donner, sans justifier, $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x)$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$. Dresser le tableau de variation de f' sur $\mathbb{R}$.

e) Démontrer avec soin que l'équation : $f'(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ que l'on notera α.

f) Donner, en explicitant votre méthode, un encadrement de α à 10^{-2} près.

g) Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis en déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

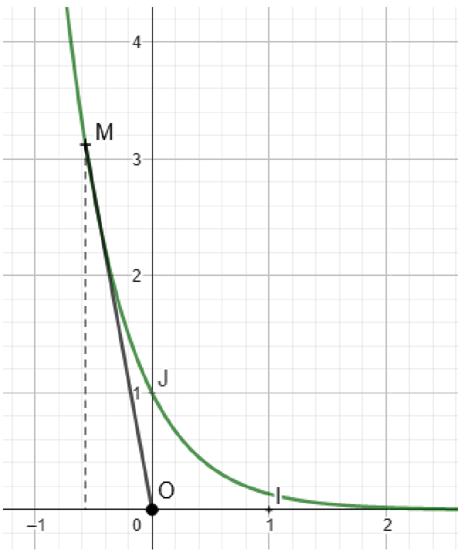
h) Etablir que f admet un minimum sur $\mathbb{R}$, puis prouver que ce minimum égal à $\alpha(\alpha + 0{,}5)$.

Partie B* : *Recherche d'une distance minimale

On se place dans un repère orthonormé (O ; I ; J).

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^{-2x}$.

Soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$. On définit alors la fonction g sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = $ OM, où OM désigne la distance entre les points O et M. Le graphique ci-joint résume la situation :



a) Etablir que $g(x) = \sqrt{f(x)}$ où f est la fonction définie à la partie A.

b) Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$. Les limites ne sont ici pas attendues.

c) En déduire que parmi tous les points situés sur $\mathcal{C}$, il en existe un unique situé le plus proche possible de O. On notera A ce point dont on précisera les coordonnées, en valeur exacte.

<u>Exercice II</u> **(3 *points*)**

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{e^x}$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. ***a.*** Donner la limite de f en $-\infty$.
   b. Justifier que l'axe des abscisses est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$.

2. On <u>admet</u> que pour tout réel x, $f'(x) = \frac{-x+1}{e^x}$. Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$, et dresser son tableau de variation en y faisant figurer les limites.

3.

Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

A voir pour des modifs ?

Exercice I ***(14 points)***

Partie A ***: Etude d'une fonction auxiliaire g.***

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$ par : $g(x) = x^2e^x - 1$.

a) Déterminer la limite de g en $+\infty$.

b) Démontrer que la fonction g est strictement croissante sur $[0\ ;+\infty[$, puis dresser son tableau de variation.

c) Démontrer qu'il existe un unique réel α appartenant à l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

d) Donner un encadrement de α à 10^{-2} près, puis en déduire la valeur approchée de α au dixième près.

e) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;+\infty[$.

Partie B ***: Etude d'une nouvelle fonction.***

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = e^x + \frac{1}{x}$.

a) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
b) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.
c) En déduire le sens de variation de f sur $]0\ ;+\infty[$, et dresser son tableau de variation.
d) Démontrer que la fonction f admet pour minimum le réel $m = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha}$ sur $]0\ ;+\infty[$.