**Terminale Maths Groupe 1** — **Devoir surveillé numéro 5** — **25 Novembre 2024**

***Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats. ±0,5 point est réservé en bonus/malus pour la présentation de la copie.***

***Exercice I* (7 points)**

Dans un souci d'améliorer sa politique en matière de développement durable, une entreprise a réalisé une enquête statistique sur sa production de déchets.
Dans cette enquête, les déchets sont classés en trois catégories :

— 69 % des déchets sont minéraux et non dangereux ;

— 28 % des déchets sont non minéraux et non dangereux ;

— les déchets restants sont des déchets dangereux.

Cette enquête statistique nous apprend également que :

— 73 % des déchets minéraux et non dangereux sont recyclables ;

— 49 % des déchets non minéraux et non dangereux sont recyclables ;

— 35 % des déchets dangereux sont recyclables.

*Les parties* A *et* B *sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.*

**Partie A**

Dans cette entreprise, on prélève au hasard un déchet. On considère les évènements suivants :

— $M$ : « Le déchet prélevé est minéral et non dangereux » ;

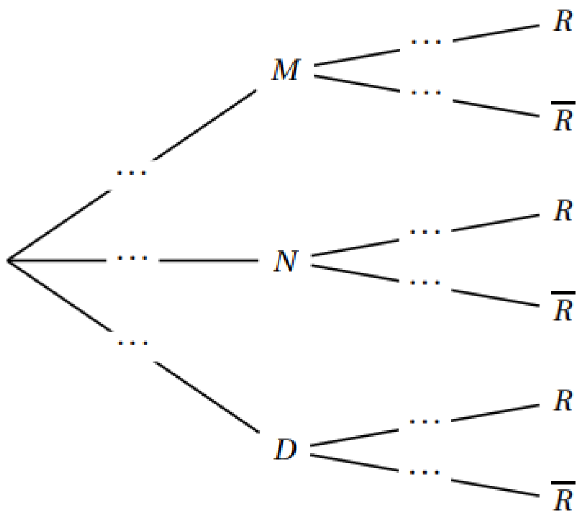
— $N$ : « Le déchet prélevé est non minéral et non dangereux » ;

— $D$ : « Le déchet prélevé est dangereux » ;

— $R$ : « Le déchet prélevé est recyclable ».

On note $\overline{R}$ l'évènement contraire de l'évènement $R$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation de l'énoncé.




2. Justifier que la probabilité que le déchet soit dangereux et recyclable est égale à 0,010 5.

**3.** Déterminer la probabilité $P\left(M \cap \overline{R}\right)$ et interpréter la réponse obtenue dans le contexte de l'exercice.

**4.** Démontrer que la probabilité de l'évènement $R$ est $P(R) = 0{,}651\,4$.

**5.** On suppose que le déchet prélevé est recyclable. Déterminer la probabilité que ce déchet soit non minéral et non dangereux. *On donnera la valeur arrondie au dix-millième.*

**Partie B**

On rappelle que la probabilité qu'un déchet prélevé au hasard soit recyclable est égale à 0,651 4.

**1.** Afin de contrôler la qualité de la collecte dans l'entreprise, on prélève un échantillon de 20 déchets pris au hasard dans la production. On suppose que le stock est suffisamment important pour assimiler le prélèvement de cet échantillon à un tirage avec remise.

On désigne par $X$ la variable aléatoire égale au nombre de déchets recyclables dans cet échantillon.

***a.*** Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale, et préciser ses paramètres.

***b.*** Donner la probabilité que l'échantillon contienne exactement 14 déchets recyclables. On arrondira au dix-millième près.

***c.*** Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au moins 10 déchets recyclables. On arrondira à $10^{-3}$ *près.*

***d.*** Calculer l'espérance de X et interpréter cette dernière dans le cadre de l'exercice.

**2.** Dans cette question, on prélève désormais $n$ déchets, où $n$ désigne un entier naturel strictement positif.

**a.** Donner l'expression en fonction de $n$ de la probabilité $p_n$ qu'aucun déchet de cet échantillon ne soit recyclable.

***b.*** En s'aidant de votre machine, déterminer la valeur de l'entier naturel $n$ à partir de laquelle la probabilité qu'au moins un déchet du prélèvement soit recyclable est supérieure ou égale à 0,9999.

***Exercice II*** **(10 *points*)**

*Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.*

*Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas.*

*Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de* 0,2.

*De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.*

*On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.*

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on définit les évènements suivants :

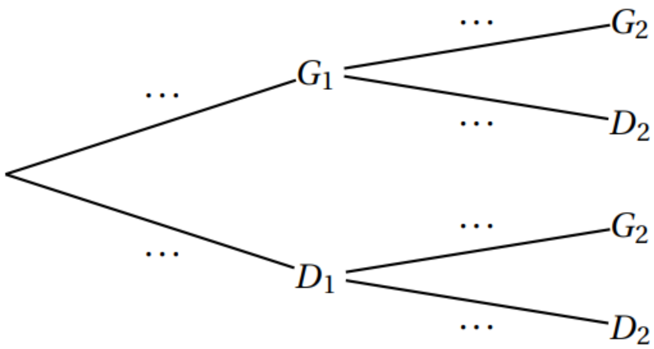
- $G_n$ : « Léa gagne la $n$-ième partie de la journée » ;
- $D_n$ : « Léa perd la $n$-ième partie de la journée ».

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $g_n$ la probabilité de l'évènement $G_n$.

**0.** Combien vaut $g_1$ ?

**1.** Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $p_{G_1}(D_2)$ ?

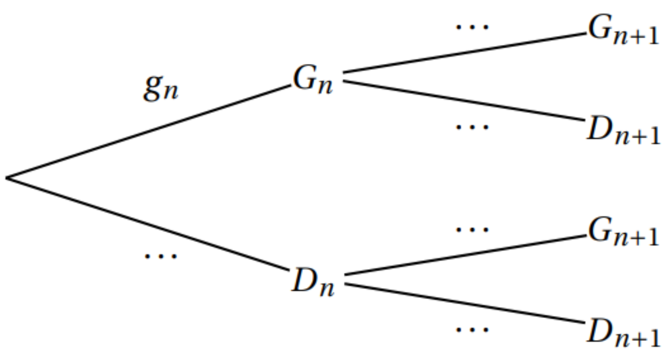
**2.** Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :




**3.** Calculer $g_2$.

**4.** Soit $n$ un entier naturel non nul.

**a.** Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les $n$-ième et $(n+1)$-ième parties de la journée.




**b.** Justifier que pour tout entier naturel $n$ non nul,

$$g_{n+1} = 0{,}5 g_n + 0{,}2.$$

**5.** Pour tout entier naturel $n$ non nul, on pose $v_n = g_n - 0{,}4$.

**a.** Montrer que la suite $(v_n)$ est géométrique.
On précisera son premier terme et sa raison.

**b.** Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul :

$$g_n = 0{,}1 \times 0{,}5^{n-1} + 0{,}4.$$

**6.** Étudier les variations de la suite $(g_n)$.

**7.** Donner, en justifiant, la limite de la suite $(g_n)$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

**8*a*)**

Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite $(g_n)$ sont tous inférieurs ou égaux à $0{,}4 + e$, où $e$ est un nombre réel strictement positif.

```
1   def seuil(e) :
2       g = 0.5
3       n = 1
4       while ... :
5           g = 0.5 * g + 0.2
6           n = ...
7       return (n)
```

**8*b*)**

A l'aide de votre machine à calculer, déterminer l'affichage en sortie de l'algorithme lorsqu'on choisit e $= 0{,}001$.

***Exercice III*** **(3 points)**

***Déterminer pour chaque question, la bonne réponse parmi celles données, et la recopier sur votre copie. Aucune justification n'est ici attendue dans ce QCM.***

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 4 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.
On choisit au hasard $n$ pièces produites par la chaîne de fabrication.
Le nombre de pièces produites est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise.
On note $X$ la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses tirées.
Dans les trois questions suivantes, on prend $n = 50$.

**1.** Quelle est la probabilité, arrondie au millième, de tirer au moins une pièce défectueuse?

**a.** 1 **b.** 0,870 **c.** 0,600 **d.** 0,599

**2.** La probabilité $p(3 < X \leqslant 7)$ est égale à :

**a.** $p(X \leqslant 7) - p(X > 3)$ **b.** $p(X \leqslant 7) - p(X \leqslant 3)$
**c.** $p(X < 7) - p(X > 3)$ **d.** $p(X < 7) - p(X \geqslant 3)$

**3.** Quel est le plus petit entier naturel $k$ tel que la probabilité de tirer au plus $k$ pièces défectueuses soit supérieure ou égale à 95 %?

**a.** 2 **b.** 3 **c.** 4 **d.** 5

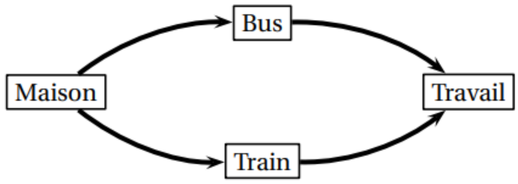
Dans les questions suivantes, $n$ ne vaut plus nécessairement 50.

**4.** Quelle est la probabilité de ne tirer que des pièces défectueuses?

**a.** $0,04^n$ **b.** $0,96^n$ **c.** $1-0,04^n$ **d.** $1-0,96^n$

La situation suivante s'applique aux deux dernières questions et est indépendante des questions 1 à 4.

Pour se rendre à son travail, Albert peut utiliser au choix le bus ou le train.




La probabilité que le bus soit en panne est égale à $b$.
La probabilité que le train soit en panne est égale à $t$.
Les pannes de bus et de train surviennent de façon indépendante.

**5.** La probabilité $p_1$ que le bus ou le train soient en panne est égale à :

**a.** $p_1 = bt$ **b.** $p_1 = 1 - bt$ **c.** $p_1 = b + t$ **d.** $p_1 = b + t - bt$

**6.**

La probabilité $p_2$ que Albert puisse se rendre à son travail est égale à :

**a.** $p_2 = bt$ **b.** $p_2 = 1 - bt$ **c.** $p_2 = b + t$ **d.** $p_2 = b + t - bt$