

Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats.

Un bonus-malus de $\pm 0,5$ point sera affecté à la présentation de la copie.

Exercice I (3 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse, en justifiant votre réponse. Toute réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

1. Soit (V_n) une suite telle que pour tout entier naturel n : $\frac{1}{2} \leq V_n \leq \frac{3n^2+4n+7}{6n^2+1}$.

Affirmation 1 : “La suite (V_n) converge vers $\frac{1}{2}$ ”.

2. (t_n) est la suite récurrente définie par : $t_0 = 20$ et pour tout entier naturel n , $t_{n+1} = -0,8t_n + 18$.

Affirmation 2 : “la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = t_n - 10$ est une suite géométrique”.

On considère la suite (u_n) définie à l'aide du script écrit ci-dessous en langage Python, qui renvoie la valeur de u_n .

```
def u(n) :  
    valeur = 2  
    for k in range(n) :  
        valeur = 0.5 * (valeur + 2/valeur)  
    return valeur
```

On admet que (u_n) est décroissante et vérifie pour tout entier naturel n :

$$1 \leq u_n \leq 2$$

Affirmation 3 : “La suite (u_n) converge vers 1”.

Exercice II (8 points)

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3000 cétacés dans une réserve au 1^{er} juin 2023. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2000. Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1^{er} juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1^{er} novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5% de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n) . Selon ce modèle, pour tout entier naturel n , u_n désigne le nombre de cétacés au 1^{er} juin de l'année 2023 + n . On a donc $u_0 = 3000$.

1) Justifier que $u_1 = 2926$.

2) Etablir que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$.

3)

a) Démontrer que pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 1520$.

b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (u_n) converge.

d) On note L la limite de cette suite. En utilisant la relation de la question 2), calculer la valeur de L.

e) Selon ce modèle, la réserve fermera-t-elle un jour ?

4)

a) On donne l'algorithme suivant écrit avec Python :

```
def menace_reserve():
    n=0
    u=3000
    while u>=2000:
        n=n+1
        u=0.95*u+76
    return 2023+n
```

Déterminer le rôle de cette fonction Python, et l'interpréter dans le cadre de la situation ici étudiée.

b) A l'aide de votre calculatrice, déterminer la valeur retournée en sortie par cet algorithme.

Exercice III (9 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1.
 - a. Démontrer que $u_1 = 12$.
 - b. Déterminer u_2 en détaillant le calcul.
 - c. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n) .
2.
 - a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n \geq n + 1.$$

- b. En déduire la limite de la suite (u_n) .

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1.$$

- a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

Donner sa raison et son premier terme v_0 .

- b. En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de v_n en fonction de n .
 - c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

- d. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

4. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10^7$.

- a. Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.
 - b. Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```
def suite() :  
    u = 3  
    n = 0  
    while ... :  
        u = ...  
        n = n + 1  
    return n
```