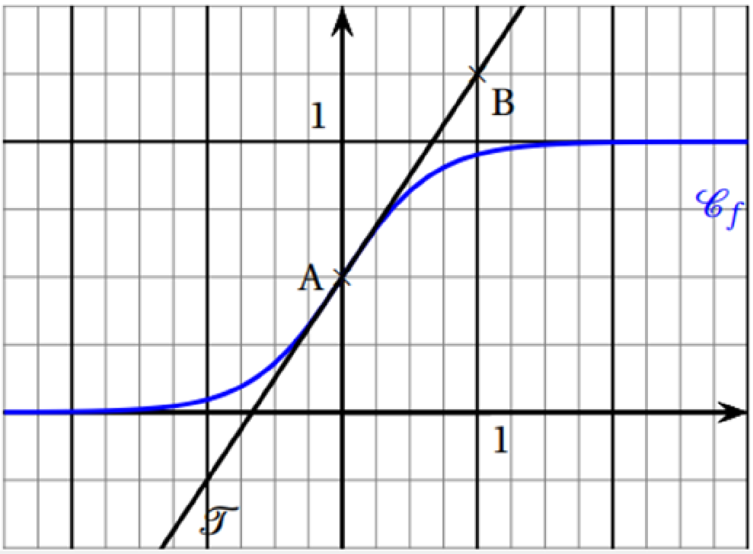
Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats.
$\pm$0,5 *point est réservé en bonus / malus pour la présentation de la copie.*

Exercice I **(4 *points*)**

f est la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1+e^{-3x}}$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On nomme A le point de coordonnées $\left(0 ; \frac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1 ; \frac{5}{4}\right)$.
On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{T}$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.

Cette tangente passe par le point B.



Partie A **: *Etude graphique.***

a) Combien vaut $f'(0)$? Justifier rapidement.

b) Etudier graphiquement la convexité de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B **: *Etude algébrique de la fonction f.***

1) Calculer $f'(x)$, <u>en détaillant vos étapes</u> sur la copie.
2) En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3) Déterminer, par le calcul, l'équation réduite de la droite $\mathscr{T}$ tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse 0.
4) On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la dérivée seconde de f.

On admet que pour tout réel x, $f''(x) = \frac{9e^{-3x}(e^{-3x}-1)}{(1+e^{-3x})^3}$.

a) Etudier le signe de f'' sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier algébriquement la convexité de f sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire du point A ?

c) En déduire que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $e^{-3x} + 1 \geq \frac{4}{3x+2}$.

Exercice II **(4 *points*)**

0) Traduire mathématiquement la phrase suivante : une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ est minorée par 3.

1) Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante, où n est entier naturel : $4^n > 7n + 1$.

a) $\mathcal{P}(0)$ est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

b) $\mathcal{P}(2)$ est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

c) Enoncer la propriété $\mathcal{P}$ au rang n+1.

2) Voici une fonction en Python :

```
def u(n):
    u=1
    for k in range(n):
        u=(u**3-1)/(2*u+1)
        return u
```

a) Quelle valeur retourne en sortie cette fonction Python si on tape dans la console :

$u(1)$? $u(2)$? Détaillez vos calculs sur la copie. Et si l'on tapait $u(0)$, quel serait l'affichage en sortie ?

b) Déterminer la relation de récurrence vérifiée par la suite (u_n) définie par cette fonction Python.

Exercice III **(3,5 *points*)**

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - 2n - 1$.

1*a*) Calculer u_1 et u_2.

1*b*) Compléter le tableau suivant <u>sans justifier</u> :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n								

1*c*) Quelle conjecture fait-on sur l'expression explicite de u_n en fonction de n ?

2) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que la conjecture précédente est vraie pour tout entier naturel n.

Exercice IV **(3,5 *points*)**

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 400$, et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 0{,}9u_n + 60$.

1) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel n, on a :

$u_n = 600 - 200 \times 0{,}9^n$.

2) En déduire, très simplement, que la suite (u_n) est majorée par 600.

3) Déterminer, en justifiant, le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice V **(1,5 *point*)**

Pour chacune des questions du Q.C.M. suivant, déterminer <u>la</u> bonne réponse parmi celles proposées : on n'attend ici <u>aucune justification</u> :

<u>Question 1 :</u>

Sous forme factorisée, la dérivée de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x^2+1)e^x$ est égale à :

a. $h'(x) = 2xe^x$ ***b.*** $h'(x) = (x+1)^2 e^x$ ***c.*** $h'(x)=(2x+1)\, e^x$ ***d.*** $h'(x)=(x^2+2x+2)\, e^x$

<u>Question 2</u> :

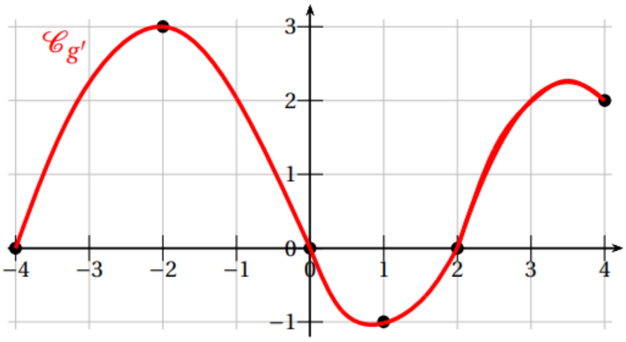
On suppose que g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ 4]$. On donne ci-contre la représentation graphique de sa fonction dérivée g'.
On peut affirmer que :

a. g admet un maximum en -2.

b. g est croissante sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.

c. g est convexe sur l'intervalle $[1\,;\,2]$.

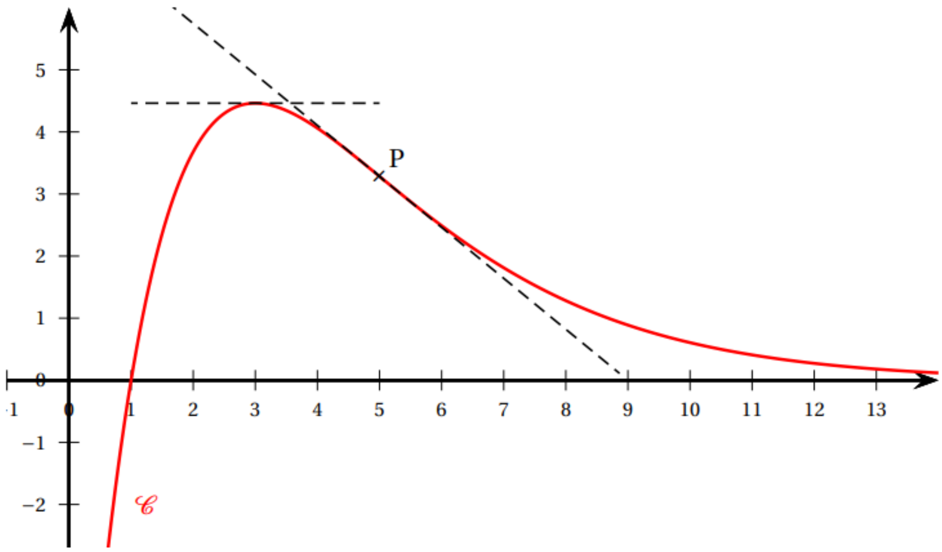
d. g admet un minimum en 0.



<u>Question 3 :</u>

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$. On sait que :

- le maximum de la fonction f est atteint au point d'abscisse 3 ;
- le point P d'abscisse 5 est l'unique point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.



A. pour tout $x \in]0\ ;\ 5[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe ;

B. pour tout $x \in]5\ ;\ +\infty[$, $f(x)$ et $f'(x)$ sont de même signe ;

C. pour tout $x \in]0\ ;\ 5[$, $f'(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe ;

D. pour tout $x \in]5\ ;\ +\infty[$, $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

Exercice VI **(3,5 *points*)**

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 8$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{6u_n+2}{u_n+5}$.

1) Calculer la valeur exacte de u_1.

2) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{6x+2}{x+5}$.
   On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$.

b) En déduire que pour tout réel $x > 2$, $f(x) > 2$.

c) A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

d) En déduire le sens de variation de la suite (u_n).