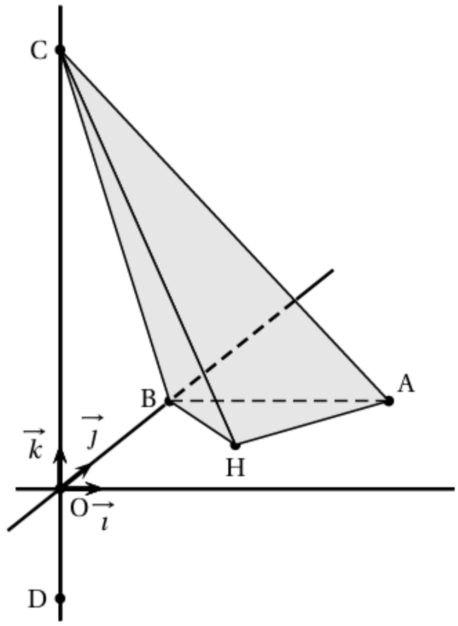
Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats : -0,5 sinon.

Règle de bon sens : si je bloque à une question, j'y passe au maximum 5 minutes dessus, puis j'admets le résultat demandé et poursuis l'exercice !

***Exercice III* (8 points)**



L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i},\,\vec{j},\,\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(5\,;\,5\,;\,0)$, $B(0\,;\,5\,;\,0)$, $C(0\,;\,0\,;\,10)$ et $D\left(0\,;\,0\,;\,-\frac{5}{2}\right)$.

1. **a.** Montrer que $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD).

   b. En déduire que le plan (CAD) a pour équation cartésienne : $x - y = 0$.

2. On considère la droite $\mathscr{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = \frac{5}{2}t \\ y = 5 - \frac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

   a. On admet que la droite $\mathscr{D}$ et le plan (CAD) sont sécants en un point H. Justifier que les coordonnées de H sont $\left(\frac{5}{2}\,;\,\frac{5}{2}\,;\,0\right)$.

   b. Démontrer que le point H est le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).

3. **a.** Démontrer que le triangle ABH est rectangle en H.

   b. En déduire que l'aire du triangle ABH est égale à $\frac{25}{4}$.

4. **a.** Démontrer que (CO) est la hauteur du tétraèdre ABCH issue de C.

   b. En déduire le volume du tétraèdre ABCH.

   On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathscr{B}h$, *où* $\mathscr{B}$ *est l'aire d'une base et* h *la hauteur relative à cette base.*

5. On admet que le triangle ABC est rectangle en B. Déduire des questions précédentes la distance du point H au plan (ABC).

Exercice II (4 *points*)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points suivants :

$$A(2;0;0), \quad B(0;4;3), \quad C(4;4;1), \quad D(0;0;4) \quad \text{et} \quad H(-1;1;2).$$

Affirmation 1 : les points A, C et D définissent un plan $\mathscr{P}$ d'équation $8x-5y+4z-16=0$.

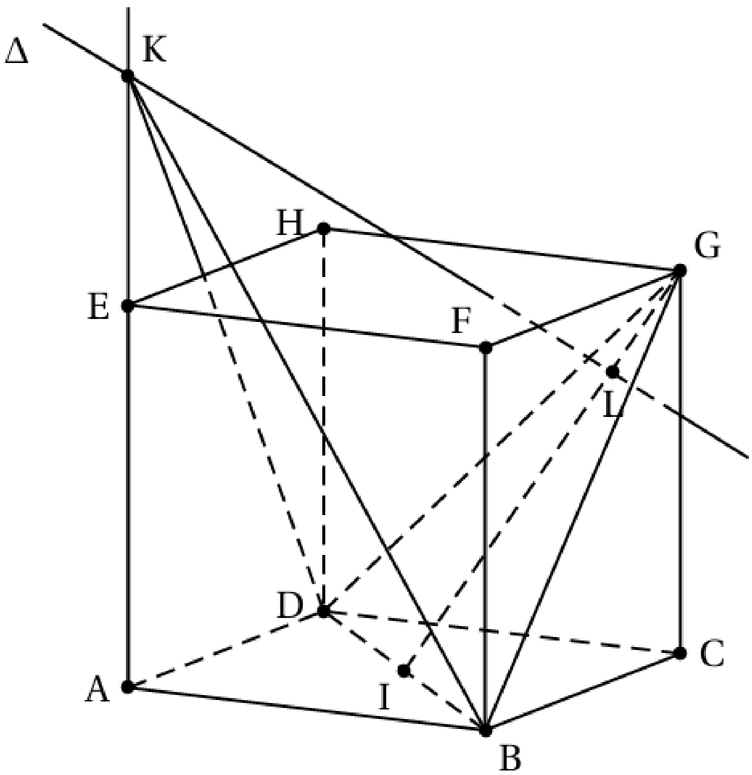
Affirmation 2 : les points A, B, C et D sont coplanaires.

Affirmation 3 : les droites (AC) et (BH) sont sécantes.

Affirmation 4 : La mesure de l'angle $\widehat{BAC}$, arrondie au degré près, est 53°.

Exercice III (8 *points*)

On considère un cube ABCDEFGH de côté 1.



Le point I est le milieu du segment [BD]. On définit le point L tel que $\overrightarrow{\mathrm{IL}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{IG}}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A}\,;\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. **a.** Préciser les coordonnées des points D, B, I et G.
Aucune justification n'est attendue.

b. Montrer que le point L a pour coordonnées $\left(\frac{7}{8}\,;\ \frac{7}{8}\,;\ \frac{3}{4}\right)$.

2. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (BDG) est $x + y - z - 1 = 0$.

3. On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.

a. Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite Δ est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{7}{8} + t \\ y & = & \frac{7}{8} + t \\ z & = & \frac{3}{4} - t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

b. Montrer que les droites Δ et (AE) sont sécantes au point K de coordonnées $\left(0\,;\ 0\,;\ \frac{13}{8}\right)$.

c. Que représente le point L pour le point K? Justifier la réponse.

4.a. Calculer la distance KL.

4.b. Sans calcul, justifier que le triangle DBG est équilatéral. Montrer que l'aire de ce triangle est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c. En déduire le volume du tétraèdre KDBG.
On rappelle que :

- le volume d'une pyramide est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative a cette base;
- un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire.

5. On désigne par a un réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\ +\infty[$ et on note K_a le point de coordonnées $(0\,;\ 0\,;\ a)$.

a. Exprimer le volume $\mathcal{V}_a$ de la pyramide ABCDK_a en fonction de a.

b. On note Δ_a la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t' \\ y & = & t' \\ z & = & -t' + a \end{array}\right. \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}.$$

On appelle L_a le point d'intersection de la droite Δ_a avec le plan (BDG).
Montrer que les coordonnées du point L_a sont $\left(\frac{a+1}{3}\,;\ \frac{a+1}{3}\,;\ \frac{2a-1}{3}\right)$.

c. Déterminer, s'il existe, un réel strictement positif a tel que le tétraèdre GDBK_a et la pyramide ABCDK_a sont de même volume.