Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats : -0,5 sinon.

Règle de bon sens : si je bloque à une question, j'y passe au maximum 5 minutes dessus, puis j'admets le résultat demandé et poursuis l'exercice !

Exercice I (4 *points*)

Déterminer, en justifiant, si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse :

f est la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(x)$.

Affirmation 1 : f est solution sur $]0\ ;+\infty[$ de l'équation différentielle : $xy' - y = x$.

---

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + 2e^{-x^2+5}$

Affirmation 2 : Il existe une primitive de la fonction g décroissante sur $\mathbb{R}$.

Pour les affirmations 3 et 4, on considère l'équation différentielle notée (E) : $y' = \frac{3}{2}y + 2$, d'inconnue y, où y est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 3 : Il existe une unique fonction constante solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

On note h la solution de (E) qui vérifie la condition initiale : $h(0) = 0$.

Affirmation 4 : La tangente au point d'abscisse 1 à la courbe représentative de h a pour coefficient directeur $2e^{\frac{3}{2}}$.

Exercice II (4 *points*)

1) Déterminer une primitive des fonctions suivantes, sur l'intervalle donné :

a) f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-2x} + x^2 + 6x - 1$

b) g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -xe^{x^2+2025}$.

c) h est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $h(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}}$

2) k est définie sur $\mathbb{R}$ par : $k(x) = 2x(x^2+1)^4$. Déterminer la primitive K de k sur $\mathbb{R}$ telle que K(2)=0.

Exercice III (2 *points*)

Soit (E) l'équation différentielle suivante : $y'' - 2y' = 1$, où y désigne une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pose $z = y'$ (changement de fonction inconnue).

1) Déterminer l'équation différentielle notée (E') vérifiée par la fonction z, puis la résoudre sur $\mathbb{R}$.

2) En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice IV (3 _points_)

On note $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs d'un corps à l'instant t, où t est exprimé en jours.

On admet que la fonction N est solution sur $[0\ ;\ +\infty[$ de l'équation différentielle suivante, notée (E) : $y' = ay$, où a est une constante réelle.

a) Résoudre (E) sur $[0\ ;+\infty[$.

b) Déterminer alors l'expression de $N(t)$ en fonction de a et de t, sachant qu'à l'instant initial $t = 0$, le corps est formé d'un milliard de noyaux radioactifs.

c) Au bout de 18 jours, le nombre de noyaux radioactifs a diminué de moitié.

Démontrer que la valeur exacte de a est égale à $\frac{-\ln(2)}{18}$, puis en déduire le sens de variation de N sur $[0\ ;\ +\infty[$.

d) Déterminer la limite de la fonction N en $+\infty$ en justifiant, et interpréter ce résultat.

Exercice V (7 _points_)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{6}{1+5\mathrm{e}^{-x}}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

Partie A

1. Montrer que le point A de coordonnées $(\ln 5\ ;\ 3)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Montrer que la droite d'équation $y = 6$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.
3. **a.** On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée. Montrer que pour tout réel x, on a :

$$f'(x) = \frac{30\mathrm{e}^{-x}}{(1+5\mathrm{e}^{-x})^2}.$$

   b. En déduire le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}$.

***Partie* B**

L'objectif de cette partie est d'étudier l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad y' = y - \frac{1}{6}y^2.$$

On rappelle qu'une solution de l'équation (E) est une fonction u définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel, on a :

$$u'(x) = u(x) - \frac{1}{6}[u(x)]^2.$$

1. Montrer que la fonction f définie dans la partie A est une solution de l'équation différentielle (E).

2. Résoudre l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$.

3. On désigne par g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas.

On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{g(x)}$.

On admet que h est dérivable sur $\mathbb{R}$, On note g' et h' les fonctions dérivées de g et h.

a. Montrer que si h est solution de l'équation différentielle $y' = -y + \frac{1}{6}$, alors g est solution de l'équation différentielle $y' = y - \frac{1}{6}y^2$.

b. Réciproquement, démontrer que si g est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas, alors la fonction $h = \frac{1}{g}$ est solution de l'équation différentielle : $y' = -y + \frac{1}{6}$ sur $\mathbb{R}$.

c. En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.