Terminale Maths Groupe 1 **_Devoir surveillé numéro 1_** **_Mardi 24 Septembre 2024_**

Vous soignerez la présentation de votre copie et encadrerez vos résultats. ±0,5 point est réservé en bonus/malus pour la présentation de la copie.

Exercice I (5 _points_)

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle donné :

a) $f(x) = -2x^2 + 1 + e^{2x+4}$ sur $\mathbb{R}$.

b) $g(x) = 4x^3 + x + 7$ sur $\mathbb{R}$, puis $h(x) = (4x^3 + x + 7)^5$ sur $\mathbb{R}$.

c) $i(x) = \frac{e^x}{x^2}$ sur $]0\ ;+\infty[$ (Mettre la dérivée avec son numérateur sous forme factorisée).

d) $j(x) = \frac{3}{10+e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$.

e) $k(x) = \sqrt{2x^4 + e^{-x^2}}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice II (4 _points_)

f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^{-2x}$. On note C_f sa courbe représentative, et f' la fonction dérivée de f.

1) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (-2x-1)e^{-2x}$.

2) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$, et dresser son tableau de variation.

3) Combien C_f admet-elle de tangentes parallèles à l'axe des abscisses ? Justifier.

4) Déterminer l'équation réduite de la tangente à C_f en son point A d'abscisse 0.

5) On admet que la dérivée seconde de f, notée f'', est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f''(x) = 4xe^{-2x}$.

Etudier, en justifiant, la convexité de f sur $\mathbb{R}$, et déterminer le nombre de points d'inflexion de C_f sur $\mathbb{R}$.

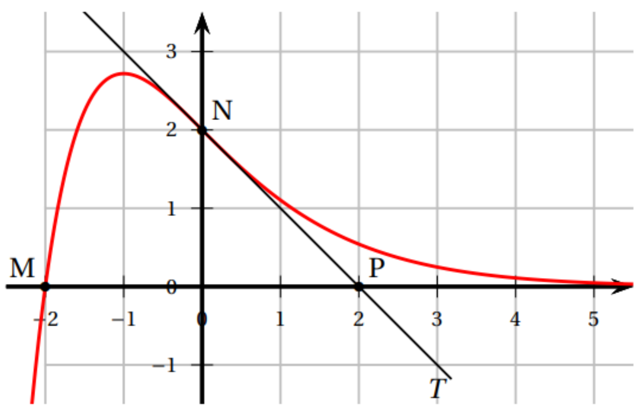
Exercice III (5 _points_)

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.

Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point N(0 ; 2) ;
- le point M(−2 ; 0) appartenant à $\mathscr{C}_f$ et P(2 ; 0) appartenant à la tangente T.

On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;-1]$.



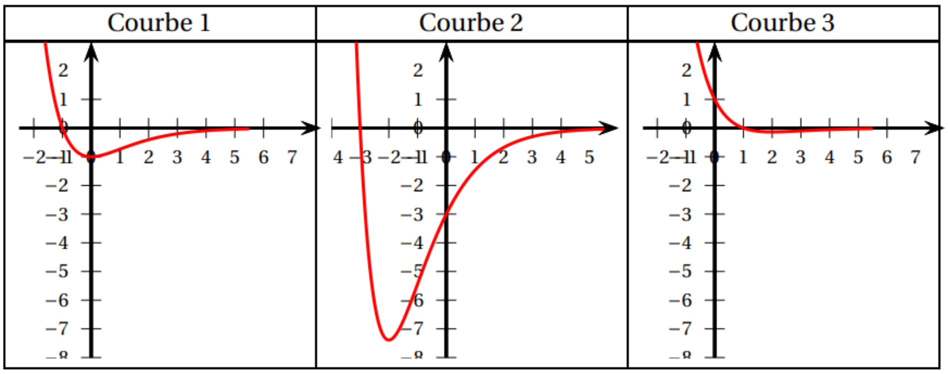
Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. **a.** Donner $f(0)$.
   b. Déterminer $f'(0)$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.

4. Parmi les courbes suivantes, laquelle admet C_f comme courbe représentative de sa fonction dérivée ?

Justifier.



Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{\lambda x},$$

où a, b et λ sont des constantes réelles.
Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.
2. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a.
3. Déterminer une expression algébrique de f. Justifier.

Exercice IV **(1,5 *points*)**

Voici un QCM. On ne vous demande ***pas*** de justifier vos réponses.

Pour chaque question, recopier sur votre copie son numéro, ainsi que ***la*** bonne réponse figurant parmi les quatre proposées :

1) La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = -x^3 + 2x^2 - 5x + 1$.

Le plus grand intervalle sur lequel h est concave est :

a. $\mathbb{R}$; ***b.*** $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right[$; ***c.*** $\left]-\infty; \frac{2}{3}\right]$; ***d.*** $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$

2) On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \frac{-1}{x} + e^{x}$.

Soit f'' la dérivée seconde de f :

Pour tout réel $x > 0$, $f''(x)$ est égale à :

a. $\frac{x^3e^x-2}{x^3}$ ***b.*** e^x ***c.*** $\frac{1}{2x} + e^x$ ***d.*** $\sqrt{x} + e^x$

3) Soit g une fonction trinôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels avec a non nul.

a. Pour tout réel $a \neq 0$, g est convexe sur $\mathbb{R}$.

b. Pour tout réel $a \neq 0$, g est concave sur $\mathbb{R}$.

c. g est convexe sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a > 0$.

d. g est convexe sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a < 0$.

Exercice V **(3 *points*)**

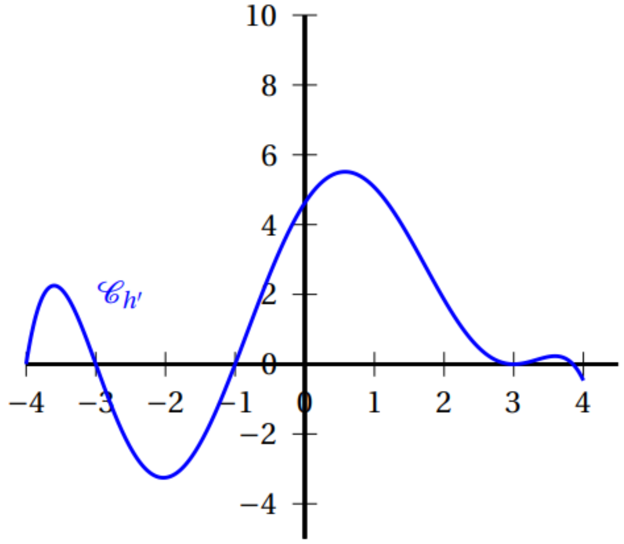
Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse, en justifiant votre réponse (une réponse non justifiée ne rapporte aucun point) :

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^{-x}$.

Affirmation 1 : « Le point A $\left(2\ ;\frac{2}{e^2}\right)$ est l'unique point d'inflexion de la courbe C_g représentative de la fonction g ».

Pour toute la suite, on se base sur le graphique ci-dessous :

Soit h une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [-4; 4].
La représentation graphique $\mathscr{C}_{h'}$ de sa fonction dérivée h' est donnée ci-dessous.



On sait de plus que la courbe de h passe par le point A(-2 ; 7).

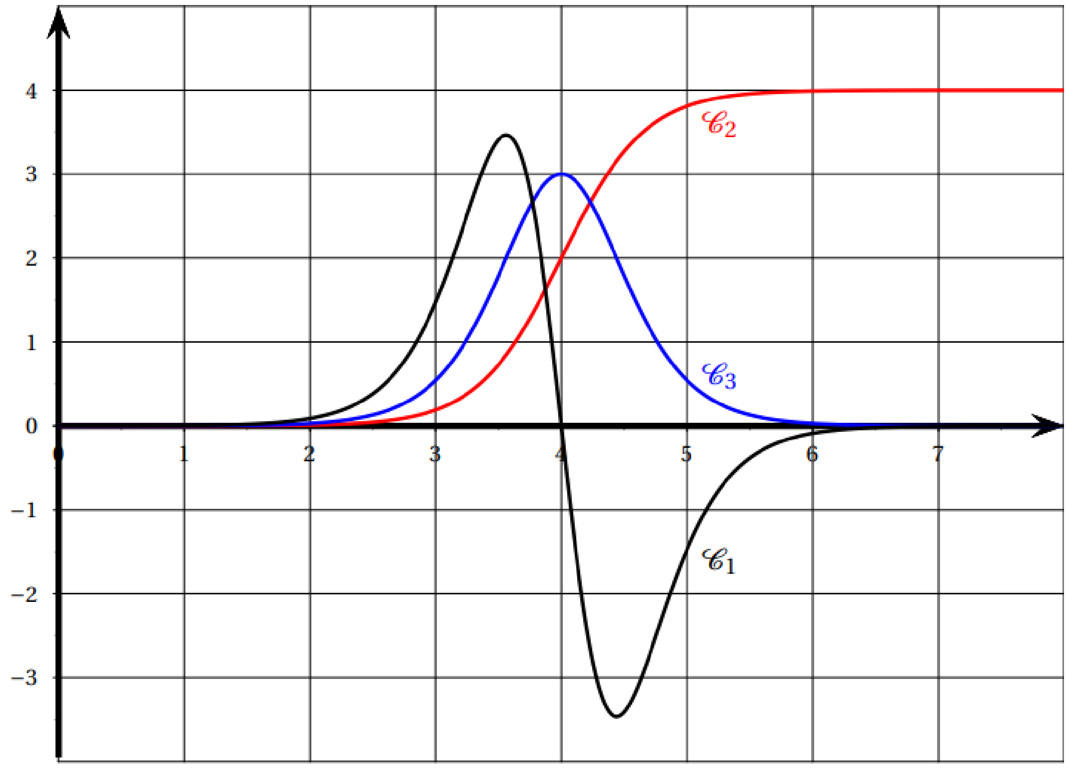
Affirmation 2 : "Pour tout réel x appartenant à l'intervalle [-1 ; 3], $h'(x) \geqslant 0$".

Affirmation 3 : "La fonction h est croissante sur l'intervalle [-3 ; -1,57]".

Affirmation 4 : “La tangente à la courbe C_h représentant la fonction h, en son point d'abscisse −2 passe par le point B de coordonnées $(0\ ;\ 1)$”.

Exercice VI (1,5 _points_)

Le plan est ramené à un repère orthogonal.
On a représenté ci-dessous la courbe d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, ainsi que celle de sa dérivée f' et de sa dérivée seconde f''.



1. Déterminer, en justifiant votre choix, quelle courbe correspond à quelle fonction.

2. Déterminer, avec la précision permise par le graphique, le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$ au point d'abscisse 4.

3. Donner avec la précision permise par le graphique, l'abscisse de chaque point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_1$.