Nota bene ***: ce travail est à rendre pour le 20 Janvier. Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 3 à 5 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot. Il fait revoir à peu près tous les thèmes abordés depuis le début de l'année !***

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et l'inéquation suivantes :

a) $ln(x+1) \leq 0$ *b*) $4e^{3x-1} = 1$ *c*) $e^{2x} + e^{x} - 12 = 0$

d) Déterminer, par le calcul, le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier naturel $n \geq n_0$, on ait : α) $1 - 0{,}84^{n} > 0{,}95$ β) $0{,}34^{n} < 10^{-6}$ γ) $\dfrac{1}{2\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n}+1} \geq 0{,}999$.

2) La fonction suivante modélise le nombre de bactéries : $g(t) = 10^{6} \times e^{0{,}25t}$, où t désigne la durée exprimée en heure.

a) Déterminer, le nombre d'individus de la population initiale.

b) Déterminer la durée nécessaire au *doublement* de la population initiale. Même question concernant son *décuplement*.

Exercice II

Pour tout réel a, on considère la fonction notée f_a définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^{a}$.

1) Montrer que pour tout réel a, la fonction f_a admet un minimum sur $\mathbb{R}$ et préciser sa valeur.
2) Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ? Justifier votre démarche.

Exercice III

Faire les exercices (ou question d'exercice) suivants du livre :

42 page 331 - 52 page 332 (par le calcul, pas par lecture graphique !) - 64 question *b*) uniquement page 332.

Exercice IV

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2 \ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. **a.** Démontrer que la limite de la fonction f en 0 est égale à 0.
   b. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. **a.** Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$

$$f''(x) = 4(1 - \ln(x)).$$

   b. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de ses tangentes.
   c. Dresser le tableau des variations de la fonction f' sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   (On admettra que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f'(x) = 2$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = -\infty$.)
4. **a.** Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
   b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ ainsi que le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
5. **a.** En utilisant l'égalité $f'(\alpha) = 0$, démontrer que :

$$\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}.$$

   En déduire que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.
   b. En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} du maximum de la fonction f.

Exercice V

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 5\ln(x+3) - x.$$

1. **a.** On appelle f' la fonction dérivée de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe sur $[0\,;\,+\infty[$.
   b. Donner, dans un tableau, les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   c. Montrer que, pour tout x strictement positif on a

$$f(x) = x\left(5\frac{\ln x}{x} - 1\right) + 5\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

d. En déduire la limite de f en $+\infty$.

e. Compléter le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$. On notera α cette solution.

b. Après avoir vérifié que α appartient à l'intervalle $[14 ; 15]$, donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

c. En déduire le signe de f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 4 \\ u_{n+1} &= 5\ln(u_n+3) \quad \text{pour tout entier naturel } n \neq 0 \end{cases}$$

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = 5\ln(x+3).$$

En annexe 1 on a tracé dans un repère orthonormé la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}$, courbe représentative de la fonction g.

1. a. Construire sur l'axe des abscisses de l'annexe 1 les termes u_0, u_1, u_2 de la suite (u_n) en utilisant la droite et la courbe données et en laissant apparents les traits de construction.

b. Formuler une conjecture sur le sens de variations de la suite (u_n)

2. a. Étudier le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

b. Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$ où α est défini dans la partie A question 2. a.

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$.

d. Démontrer alors la conjecture émise à la question 1. b. de la partie B.

e. En utilisant la question 2. a. de la partie A, justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

3. On considère l'algorithme suivant :

```
from math import*
def pgm():
    u=4
    while u-14.2<0:
        u=5*log(u+13)
    return u
```

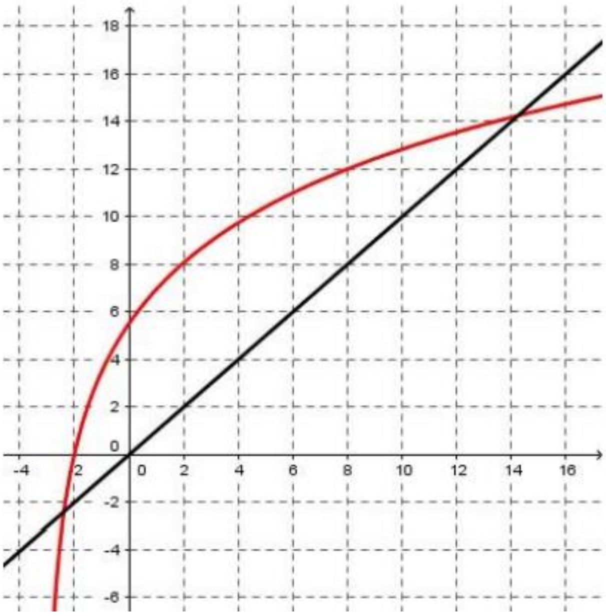
Remarque : sur Python, log désigne la fonction logarithme népérien.

0. Quel est le rôle de cet algorithme ?

a. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Justifier que cet algorithme se termine.

b. Donner la valeur que cet algorithme affiche (on arrondira à 5 décimales).

Annexe 1



Exercice VI ***(pour réviser les probabilités)***

Un jeu vidéo récompense par un objet tiré au sort les joueurs ayant remporté un défi. L'objet tiré peut être « commun » ou « rare ». Deux types d'objets communs ou rares sont disponibles, des épées et des boucliers.
Les concepteurs du jeu vidéo ont prévu que :

— la probabilité de tirer un objet rare est de 7 % ;

— si on tire un objet rare, la probabilité que ce soit une épée est de 80 % ;

— si on tire un objet commun, la probabilité que ce soit une épée est de 40 %.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Un joueur vient de remporter un défi et tire au sort un objet. On note :

- R l'évènement « le joueur tire un objet rare » ;
- E l'évènement « le joueur tire une épée » ;
- $\overline{R}$ et $\overline{E}$ les évènements contraires des évènements R et E.

1. Dresser un arbre pondéré modélisant la situation, puis calculer $P(R \cap E)$.
2. Calculer la probabilité de tirer une épée.
3. Le joueur a tiré une épée. Déterminer la probabilité que ce soit un objet rare. Arrondir le résultat au millième.

Partie B

Un joueur remporte 30 défis.
On note X la variable aléatoire correspondant au nombre d'objets rares que le joueur obtient après avoir remporté 30 défis. Les tirages successifs sont considérés comme indépendants.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres, ainsi que son espérance.
2. Déterminer $P(X < 6)$. Arrondir le résultat au millième.
3. Déterminer la plus grande valeur de k telle que $P(X \geqslant k) \geqslant 0,5$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. Les développeurs du jeu vidéo veulent proposer aux joueurs d'acheter un « ticket d'or » qui permet de tirer N objets. La probabilité de tirer un objet rare reste de 7 %.

   Les développeurs aimeraient qu'en achetant un ticket d'or, la probabilité qu'un joueur obtienne au moins un objet rare lors de ces N tirages soit supérieure ou égale à $0,95$.

   Déterminer le nombre minimum d'objets à tirer pour atteindre cet objectif. On veillera à détailler la démarche mise en œuvre.