Terminale Maths Groupe 1 — ***Devoir à la maison numéro 7*** — ***Décembre 2024***

***Nota bene** : ce travail est à rendre pour le 6 Janvier. Vous rendrez **un seul lot** de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 4 élèves, avec **les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe** sur **chaque copie du lot**.*

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.
Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

Déterminer, en justifiant, chacune des limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} 3xe^{x}$ *b)* $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x-e^{x})$ *c)* $\lim\limits_{x\to+\infty} (xe^{-x})$ *d)* $\lim\limits_{x\to+\infty} (1+\dfrac{e^{x}}{2x^{2}})$ *e)* $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+e^{x}\sin(x))$ *f)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{0,1x}}{2x}$

Exercice II

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^{2x}-2}{e^{3x}+1}$

Déterminer les limites de *f* en $-\infty$ et en $+\infty$ en justifiant, et interpréter graphiquement ces résultats.

Exercice III

On s'intéresse à la chute d'une goutte d'eau qui se détache d'un nuage sans vitesse initiale. Un modèle simplifié permet d'établir que la vitesse instantanée verticale, exprimée en $m\cdot s^{-1}$, de chute de la goutte en fonction de la durée de chute t est donnée par la fonction v définie sur $[0\,;+\infty[$ par $v(t) = 9{,}81\,\dfrac{m}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$.
La constante m est la masse de la goutte en milligramme et la constante k est un coefficient strictement positif lié au frottement de l'air.

1. Déterminer les variations de la vitesse de la goutte d'eau.

2. Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 9{,}81\,\dfrac{m}{k}$.
Cette limite s'appelle vitesse limite de la goutte.

3. Un scientifique affirme qu'au bout d'une durée de chute égale à $5\,\dfrac{m}{k}$, la vitesse de la goutte dépasse 99 % de sa vitesse limite. Cette affirmation est-elle correcte ?

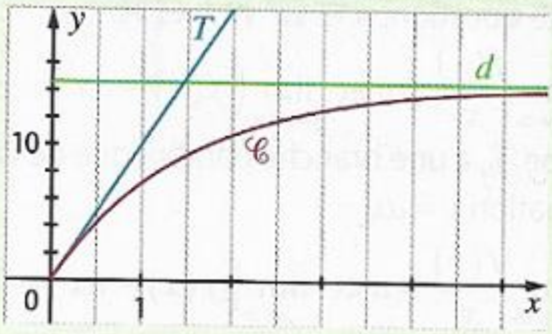
4. On nomme $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction v.

a. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote d horizontale. En donner une équation.

b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

c. Calculer l'abscisse du point d'intersection de T.

5. On a représenté $\mathscr{C}$, T et d sur le graphique ci-dessous.



Quelle est la valeur de $\frac{m}{k}$? Justifier.

Exercice IV

f est une fonction définie sur $[-8 ; 8]$, dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-8		-2		3		8
Variations de f	5	$\searrow$	-4	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

a. Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ n'admet aucune solution sur $[-2 ; 8]$.

b. Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution sur $[-8 ; -2]$.

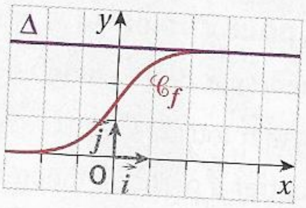
c. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur $[-8 ; 8]$.

Exercice V

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3}{1+e^{-2x}}.$$

On a tracé, dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$.



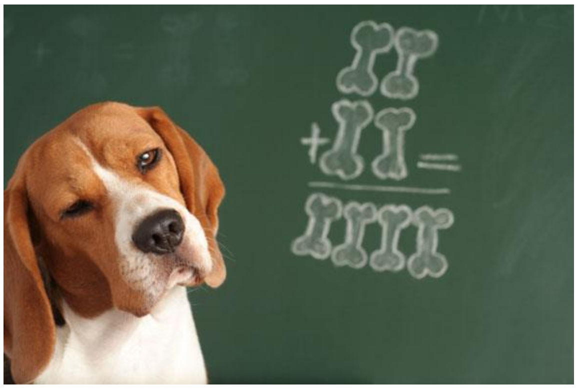
a. Justifier que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c. Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

d. Démontrer que l'équation $f(x) = 2{,}999$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.

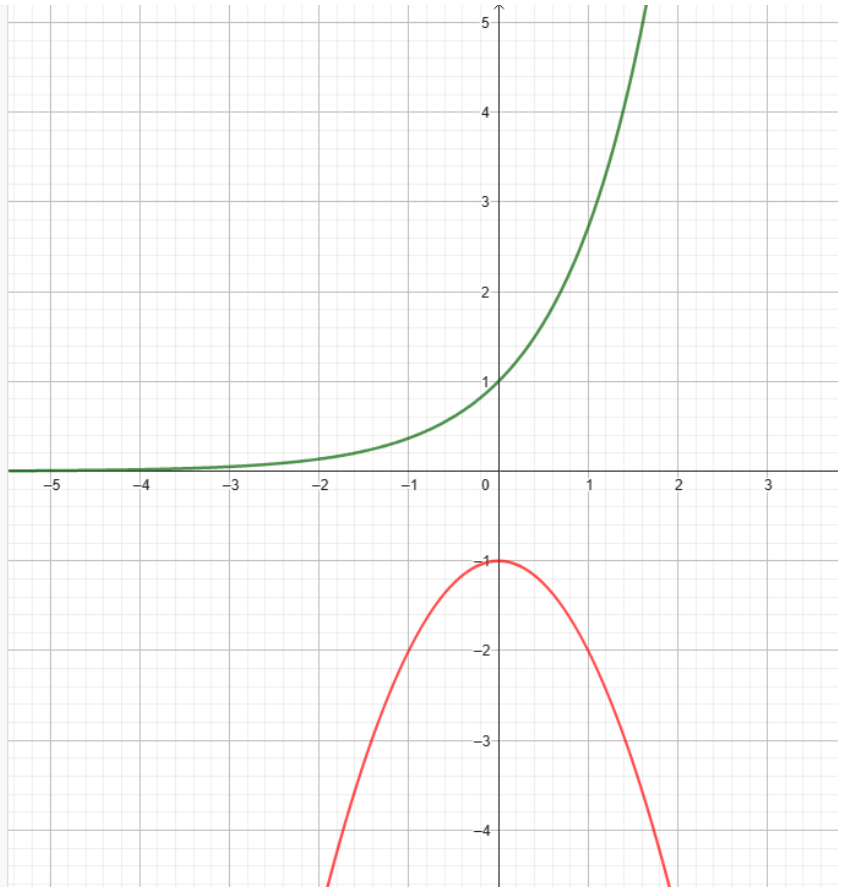
e. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.



Exercice VI

Dans un repère orthogonal du plan, soit C_1 et C_2 les courbes d'équations respectives : $y = e^x$ et $y = -x^2 - 1$.

0- Identifier sur le graphique ci-dessous les courbes C_1 et C_2, puis conjecturer si ces deux courbes admettent une tangente commune, en précisant approximativement l'abscisse du (des) point(s) de contact avec chacune de ces deux courbes.



1. On désigne par a et b deux réels quelconques, par A le point de C_1 d'abscisse a et par B le point de C_2 d'abscisse b.
   a. Déterminer une équation de la tangente T_A à la courbe C_1 au point A, puis de la tangente T_B à la courbe C_2 au point B.
   b. En déduire que ces droites sont confondues si et seulement si
   $$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^a - ae^a = b^2 - 1 \end{cases}.$$
   c. Montrer que ce système équivaut à
   $$\begin{cases} e^a = -2b \\ e^{2a} + 4ae^a - 4e^a - 4 = 0 \end{cases}.$$
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$f(x) = e^{2x} + 4xe^x - 4e^x - 4.$$
   On va montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.
   a. Montrer que pour $x < 0$, on a $e^{2x} - 4 < 0$ et $4e^x(x-1) < 0$. En déduire que l'équation n'a pas de solution sur $]-\infty; 0[$.
   b. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
   c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution a sur $[0; +\infty[$ et donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} de a.
3. On prend pour A le point d'abscisse a. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-1} du réel b pour lequel les droites T_A et T_B sont confondues.

BONUS (facultatif, pour se préparer au post bac.)

0- Discuter du nombre de points d'intersection entre la courbe de la fonction cube et celle d'une fonction affine.

I-

Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$, une fonction continue.

Montrer que f a au moins un point fixe sur $[0 ; 1]$, c'est-à-dire que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution sur $[0 ; 1]$.

II- a et b sont des réels tels que : $a \leq b$.

Soit f une fonction continue définie sur $[a ; b]$ telle que $f(a) = f(b)$.

Soit g la fonction définie sur $[a\,;\ \frac{a+b}{2}]$ par : $g(t) = f(t+\frac{b-a}{2}) - f(t)$.

0) Expliquer sommairement pourquoi g est bien définie sur l'intervalle $[a\,;\ \frac{a+b}{2}]$.

1) Démontrer que g s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[a\,;\ \frac{a+b}{2}]$.

Indication : s'intéresser aux nombres $g(a)$ et $g(\frac{a+b}{2})$.

2) Application

Un piéton parcourt 4 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle ***d'amplitude 30 minutes*** pendant lequel le piéton parcourt ***exactement*** 2 km. On supposera que la fonction définissant la distance parcourue par le piéton est continue sur $[0\ ;\ 1]$.