

Nota bene : Ce travail de synthèse sur les suites et le calcul de limites est à rendre pour le 4 Novembre. Vous rendrez un seul lot de copies **DOUBLES** par groupe de 3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I Déterminer dans chaque cas, la limite de la suite (u_n) . Préciser dans chaque cas les propriétés utilisées et détailler les calculs :

a) $u_n = \frac{2n+3}{3n-1}$ b) $u_n = \frac{(-1)^n + 3\sin(n)}{n^2}$ c) $u_n = 1,2^n - 1,21^n$ d) $u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{(-1)^n}{n}$

Exercice II Faire les mini exercices suivants à l'aide de votre livre numérique :

43 page 185 ; 45 page 185 ; 48 page 185 ; 58 page 186.

94 page 191 (*erreur d'énoncé : à la question c) il faut montrer que pour tout entier $n \geq 8$, $1 \leq u_n \leq 1 + \frac{32}{n}$*).

Exercice III

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.

En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites (a_n) et (b_n) , où n désigne le rang de l'année à partir de 2023.

L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors $a_0 = 1 700$ et $b_0 = 1 300$.

Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

- durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe;
- chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B;
- chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.
2. Pour tout entier naturel n , déterminer une relation liant a_n et b_n .
3. Montrer que la suite (a_n) vérifie la relation suivante pour tout entier naturel n , on a :

$$a_{n+1} = 0,75a_n + 300.$$

4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a :

$$1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700.$$

- b. En déduire que la suite (a_n) converge.

5. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = a_n - 1200$.
- Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
 - Exprimer v_n en fonction de n .
 - En déduire que pour tout entier naturel n , $a_n = 500 \times 0,75^n + 1200$.
6.
 - Déterminer la limite de la suite (a_n) .
 - Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.
7.
 - Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de n à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def seuil() :
    n = 0
    A = 1700
    while ... :
        n = n + 1
        A = ...
    return
```

- Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil.

Exercice IV

Faire l'exercice 79 page 219 à l'aide de votre livre numérique.

Exercice V

Voici un QCM avec justification (questions 1) à 3) et 5) à 8) : déterminer, en justifiant, la bonne réponse parmi celles données à chacune des questions suivantes :

On considère L une liste de nombres constituée de termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 7 et de raison 3, le dernier nombre de la liste est 2 023 soit :

$$L = [7, 10, \dots, 2023].$$

Question 1 : Le nombre de termes de cette liste est :

Réponse A	Réponse B	Réponse C	Réponse D
2 023	673	672	2 016

Question 2 :

On considère les suites (a_n) et (b_n) définie par $a_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,5a_n + 1$ et $b_n = a_n - 2$.

On peut affirmer que :

- (a_n) est arithmétique;
- (b_n) est géométrique;
- (a_n) est géométrique;
- (b_n) est arithmétique.

Question 3 : les suites de la questions 3) sont utilisées à la question 4).

$$u_0 = 2, v_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n : \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

. On peut affirmer que :

a. $\begin{cases} u_2 = 5 \\ v_2 = 3 \end{cases}$ **b.** $u_2^2 - 3v_2^2 = -2^2$ **c.** $\frac{u_2}{v_2} = 1,75$ **d.** $5u_1 = 3v_1$.

. On considère le programme ci-dessous écrit en langage Python :

```
def valeurs() :
    u = 2
    v = 1
    for k in range(1,11)
        c = u
        u = u + 3*v
        v = c + v
    return (u, v)
```

Question 4 : cette question n'est pas un QCM :

- a) Que retourne en sortie ce programme ?
- b) Quelles modifications doit-on y apporter afin qu'il affiche en sortie tous les termes des deux suites de rang inférieur ou égal à un entier n choisi par l'utilisateur ?

5.

Soit k un nombre réel non nul.

Soit (v_n) une suite définie pour tout entier naturel n .

On suppose que $v_0 = k$ et que pour tout n , on a $v_n \times v_{n+1} < 0$.

On peut affirmer que v_{10} est :

- a. positif.
- a. négatif.
- c. du signe de k .
- d. du signe de $-k$.

6.

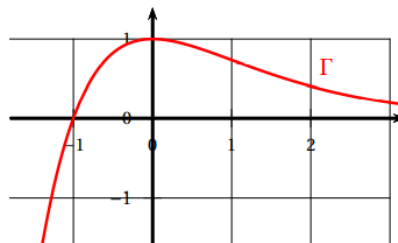
On considère une fonction f définie et dérivable sur \mathbb{R} .

On note f' sa fonction dérivée.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de f .

On note Γ la courbe représentative de f' .

On a tracé ci-contre la courbe Γ .



On note T la tangente à la courbe \mathcal{C} au point d'abscisse 0.

On peut affirmer que la tangente T est parallèle à la droite d'équation :

- a. $y = x$
- b. $y = 0$
- c. $y = 1$
- d. $x = 0$

7.

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x^{1000} + x$.

On peut affirmer que :

- a. la fonction g est concave sur \mathbb{R} .
- b. la fonction g est convexe sur \mathbb{R} .
- c. la fonction g possède exactement un point d'inflexion.
- d. la fonction g possède exactement deux points d'inflexion.

8.

On considère une suite (u_n) telle que, pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n}$.
On peut alors affirmer que :

- a. la suite (u_n) diverge;
- b. la suite (u_n) converge;
- c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$;
- d. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

Exercice VI

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n .

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
2. On considère la fonction terme ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme (n) :  
    u = ...  
    for i in range(n):  
        u = ...  
    return(u)
```

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que i varie de 0 à $n - 1$.

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n , l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n .

3. Soit la fonction f définie sur $] -3 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x-4}{x+3}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $] -3 ; +\infty[$

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-2 < u_{n+1} \leq u_n.$$

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}.$$

a. Donner v_0 .

b. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.

c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2.$$

d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Les exercices suivants sont facultatifs et permettent de se préparer au post bac.

Exercice VII

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la suite (u_n) par : $u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$.

1) Calculer à la main u_1 , u_2 et u_3 en donnant les valeurs exactes sous forme fractionnaire.

2) Ecrire u_n à l'aide du symbole Σ .

3) Ecrire un script en python qui pour un entier n non nul du choix de l'utilisateur renvoie en sortie la valeur u_n .

4) Utiliser ce dernier pour faire une conjecture sur la limite de la suite (u_n) .

5) En encadrer grossièrement u_n (on se posera la question : quel est respectivement le plus petit et plus grand terme de cette somme ?), démontrer que la conjecture effectuée à la question précédente est vraie.

+

A ~ ~
1) Montrer que $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ pour tout $k \geq 2$.

2) En déduire que la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Que dire de sa limite ?