

**Nota bene :** Ce travail de synthèse sur les suites et le calcul de limites est à rendre pour le 4 Novembre. Vous rendrez un seul lot de copies **DOUBLES** par groupe de 3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

**Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.**

**Exercice I** Déterminer dans chaque cas, la limite de la suite  $(u_n)$ . Préciser dans chaque cas les propriétés utilisées et détailler les calculs :

$$a) u_n = \frac{2n+3}{3n-1} \quad b) u_n = \frac{(-1)^n + 3\sin(n)}{n^2} \quad c) u_n = 1,2^n - 1,21^n \quad d) u_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{(-1)^n}{n}$$

**Exercice II** Faire les mini exercices suivants à l'aide de votre livre numérique :

43 page 185 ; 45 page 185 ; 48 page 185 ; 58 page 186.

94 page 191 (*erreur d'énoncé : à la question c) il faut montrer que pour tout entier  $n \geq 8$ ,  $1 \leq u_n \leq 1 + \frac{32}{n}$* ).

### **Exercice III**

On étudie un groupe de 3 000 sportifs qui pratiquent soit l'athlétisme dans le club A, soit le basketball dans le club B.

En 2023, le club A compte 1 700 membres et le club B en compte 1 300.

On décide de modéliser le nombre de membres du club A et du club B respectivement par deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ , où  $n$  désigne le rang de l'année à partir de 2023.

L'année 2023 correspond au rang 0. On a alors  $a_0 = 1 700$  et  $b_0 = 1 300$ .

Pour notre étude, on fait les hypothèses suivantes :

- durant l'étude, aucun sportif ne quitte le groupe;
- chaque année, 15 % des sportifs du club A quittent ce club et adhèrent au club B;
- chaque année, 10 % des sportifs du club B quittent ce club et adhèrent au club A.

1. Calculer les nombres de membres de chaque club en 2024.
2. Pour tout entier naturel  $n$ , déterminer une relation liant  $a_n$  et  $b_n$ .
3. Montrer que la suite  $(a_n)$  vérifie la relation suivante pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$a_{n+1} = 0,75a_n + 300.$$

4. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$1200 \leq a_{n+1} \leq a_n \leq 1700.$$

- b. En déduire que la suite  $(a_n)$  converge.

5. Soit  $(v_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par  $v_n = a_n - 1200$ .
- Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique.
  - Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
  - En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n = 500 \times 0,75^n + 1200$ .
6.
  - Déterminer la limite de la suite  $(a_n)$ .
  - Interpréter le résultat de la question précédente dans le contexte de l'exercice.
7.
  - Recopier et compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il renvoie la plus petite valeur de  $n$  à partir de laquelle le nombre de membres du club A est strictement inférieur à 1 280.

```
def seuil() :
    n = 0
    A = 1700
    while ... :
        n = n + 1
        A = ...
    return
```

- Déterminer la valeur renvoyée lorsqu'on appelle la fonction seuil.

#### Exercice IV

Faire l'exercice 79 page 219 à l'aide de votre livre numérique.

#### Exercice V

Voici un QCM avec justification (questions 1) à 3) et 5) à 8) : déterminer, en justifiant, la bonne réponse parmi celles données à chacune des questions suivantes :

On considère  $L$  une liste de nombres constituée de termes consécutifs d'une suite arithmétique de premier terme 7 et de raison 3, le dernier nombre de la liste est 2 023 soit :

$$L = [7, 10, \dots, 2023].$$

**Question 1 :** Le nombre de termes de cette liste est :

Réponse A 2 023	Réponse B 673	Réponse C 672	Réponse D 2 016
--------------------	------------------	------------------	--------------------

#### Question 2 :

On considère les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  définie par  $a_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_{n+1} = 0,5a_n + 1$  et  $b_n = a_n - 2$ .

On peut affirmer que :

- $(a_n)$  est arithmétique;
- $(b_n)$  est géométrique;
- $(a_n)$  est géométrique;
- $(b_n)$  est arithmétique.

Question 3 : les suites de la questions 3) sont utilisées à la question 4).

$$u_0 = 2, v_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n : \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$

. On peut affirmer que :

**a.**  $\begin{cases} u_2 = 5 \\ v_2 = 3 \end{cases}$       **b.**  $u_2^2 - 3v_2^2 = -2^2$       **c.**  $\frac{u_2}{v_2} = 1,75$       **d.**  $5u_1 = 3v_1$ .

. On considère le programme ci-dessous écrit en langage Python :

```
def valeurs() :
    u = 2
    v = 1
    for k in range(1,11)
        c = u
        u = u + 3*v
        v = c + v
    return (u, v)
```

**Question 4 :** cette question n'est pas un QCM :

- a) Que retourne en sortie ce programme ?
- b) Quelles modifications doit-on y apporter afin qu'il affiche en sortie tous les termes des deux suites de rang inférieur ou égal à un entier  $n$  choisi par l'utilisateur ?

5.

Soit  $k$  un nombre réel non nul.

Soit  $(v_n)$  une suite définie pour tout entier naturel  $n$ .

On suppose que  $v_0 = k$  et que pour tout  $n$ , on a  $v_n \times v_{n+1} < 0$ .

On peut affirmer que  $v_{10}$  est :

- a. positif.
- a. négatif.
- c. du signe de  $k$ .
- d. du signe de  $-k$ .

6.

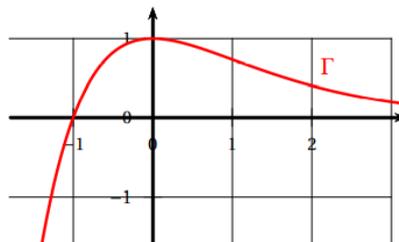
On considère une fonction  $f$  définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

On note  $f'$  sa fonction dérivée.

On note  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$ .

On note  $\Gamma$  la courbe représentative de  $f'$ .

On a tracé ci-contre la courbe  $\Gamma$ .



On note  $T$  la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0.

On peut affirmer que la tangente  $T$  est parallèle à la droite d'équation :

- a.  $y = x$
- b.  $y = 0$
- c.  $y = 1$
- d.  $x = 0$

7.

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^{1000} + x$ .

On peut affirmer que :

- a. la fonction  $g$  est concave sur  $\mathbb{R}$ .
- b. la fonction  $g$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ .
- c. la fonction  $g$  possède exactement un point d'inflexion.
- d. la fonction  $g$  possède exactement deux points d'inflexion.

8.

On considère une suite  $(u_n)$  telle que, pour tout entier naturel  $n$  non nul :  $u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n}$ .  
On peut alors affirmer que :

- a. la suite  $(u_n)$  diverge;
- b. la suite  $(u_n)$  converge;
- c.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ ;
- d.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$ .

### Exercice VI

On considère la suite  $(u_n)$  telle que  $u_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

On admet que  $u_n$  est défini pour tout entier naturel  $n$ .

1. Calculer les valeurs exactes de  $u_1$  et  $u_2$ .
2. On considère la fonction terme ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme (n) :  
    u = ...  
    for i in range(n):  
        u = ...  
    return(u)
```

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que  $i$  varie de 0 à  $n - 1$ .

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel  $n$ , l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de  $u_n$ .

3. Soit la fonction  $f$  définie sur  $] -3 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = \frac{-x-4}{x+3}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Démontrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $] -3 ; +\infty[$

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  :

$$-2 < u_{n+1} \leq u_n.$$

5. En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.

6. Soit la suite  $(v_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}.$$

a. Donner  $v_0$ .

b. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est arithmétique de raison 1.

c. En déduire que pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :

$$u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2.$$

d. Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Les exercices suivants sont facultatifs et permettent de se préparer au post bac.**

### **Exercice VII**

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on définit la suite  $(u_n)$  par :  $u_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$ .

1) Calculer à la main  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$  en donnant les valeurs exactes sous forme fractionnaire.

2) Ecrire  $u_n$  à l'aide du symbole  $\Sigma$ .

3) Ecrire un script en python qui pour un entier  $n$  non nul du choix de l'utilisateur renvoie en sortie la valeur  $u_n$ .

4) Utiliser ce dernier pour faire une conjecture sur la limite de la suite  $(u_n)$ .

5) En encadrer grossièrement  $u_n$  (on se posera la question : quel est respectivement le plus petit et plus grand terme de cette somme ?), démontrer que la conjecture effectuée à la question précédente est vraie.

+

A ~ ~  
1) Montrer que  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$  pour tout  $k \geq 2$ .

2) En déduire que la suite  $\left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge. Que dire de sa limite ?