Ce travail fait une synthèse du chapitre 1, il est à rendre pour le 30 Septembre.

Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 2, 3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

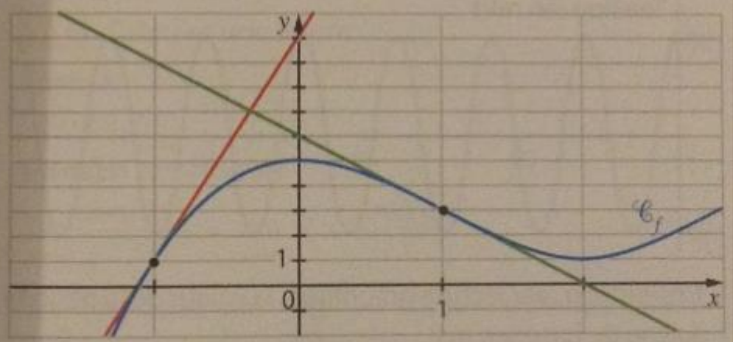
Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt automatique de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies ou exercices rendus en retard, ou ne respectant pas ces consignes, ne seront pas corrigés.

Exercice I

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. On a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et ses tangentes aux points d'abscisses -1 et 1.



Soit g, h et k les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(-x), \quad h(x) = f(2x) \quad \text{et} \quad k(x) = f(x-2).$$

1. Exprimer $g'(x)$, $h'(x)$ et $k'(x)$ en fonction de x et à l'aide de f'.

2. Lire sur le graphique les valeurs de $f'(-1)$ et de $f'(1)$.

3. En déduire les valeurs de $g'(-1)$, $g'(1)$, $h'(0{,}5)$ et $k'(1)$.

Exercice II

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x^2}$. On note C_f la courbe représentant f.

1) Etudier avec soin le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$, et dresser son tableau de variation.

2) On se propose de montrer que C_f a un seul point en commun avec la parabole d'équation : $y = x^2+1$, et que C_f est située en-dessous de cette parabole.

a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-x^2} - x^2 - 1$.

Montrer que pour tout réel x, $g'(x) = -2x(e^{-x^2} + 1)$.

b) Etudier avec soin le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.

c) En déduire que pour tout réel x, $g(x) \leqslant 0$, puis conclure quant au problème évoqué à la question 2).

d) Montrer que C_f et la parabole d'équation : $y = x^2+1$ ont la même tangente en leur point commun.

Exercice III ***(Ce n'est pas très fin comme exercice mais il faut savoir parfaitement dériver.)***

1) Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle précisé :

a) f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 - 5x)^4$

b) g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{3x^2-1}$

c) h_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $h_1(x) = \sqrt{x^2+4}$, puis h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2+4}}$

d) i définie sur $\mathbb{R}$ par : $i(x) = xe^{-x}$.

e) j est définie sur $]-\infty\,;1[$ par : $j(x) = e^{\frac{-2x+1}{4x-4}}$.

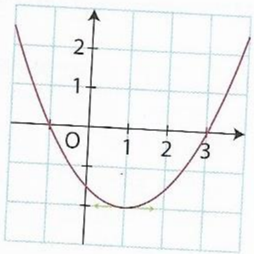
2*a*) Etudier avec soin le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{x^2}$

2*b*) Déterminer, en justifiant, si l'affirmation suivante est vraie ou fausse :

"Les tangentes à la courbe représentative de f aux points A *et* B *d'abscisses respectives* -1 *et* 1 *sont parallèles".*

Exercice IV

f est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Déterminer la convexité de la fonction f lorsque la courbe tracée dans le repère ci-contre est celle :
a) de la fonction f ;
b) de la fonction f' ;
c) de la fonction f''.



Exercice V

Pour tout entier naturel n non nul, f_n est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = 10x^2e^{nx-1}$.

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère.

Montrer que C_n admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses.

Exercice VI

f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x + 2024^{2025} - e^x$.

Démontrer que la courbe représentant f est située au-dessous de chacune de ses tangentes.

Exercice VII

g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-x} + 3x^4$.

a) Montrer que g est convexe sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe représentant g en son point d'abscisse 0.

c) En déduire que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} + 3x^4 + x - 1$ a sa courbe située au-dessus de l'axe des abscisses.

Exercice VIII ***(à ne traiter que si vous vous sentez à l'aise en calcul, facultatif sinon).***

Soient K, r et a des constantes strictement positives.

Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{K}{1+e^{-r(x-a)}}$.

1) Etudier le sens de variation de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2) Etudier la convexité de f sur $[0\ ;\ +\infty[$

Exercice IX

Soit i la fonction inverse définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $i(x) = \dfrac{1}{x}$.

On note C_i la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthonormé (O ; I ; J) du plan.

On se propose de déterminer, parmi tous les points de C_i, s'il en existe un pour lequel la distance OM est la plus petite possible.

1) A l'aide de Geogébra, faire une conjecture sur les coordonnées du point M de la courbe C_i rendant minimale la distance OM.

2) A l'aide d'une démonstration (une étude de fonction sera nécessaire), démontrer qu'il existe un unique point sur C_i qui minimise la distance OM. On précisera les coordonnées de ce point, ainsi que la valeur minimale de la longueur OM.