***Nota bene* : ce travail est à rendre pour le 29 Avril. Il fait une synthèse sur le calcul intégral et fait revoir quelques autres points pour le baccalauréat.**

Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.
Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice 0

Calculer les intégrales suivantes :

$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2e^x + \sin(x) + 2\cos(x))dx$; $\mathrm{J} = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$; $\mathrm{K} = \int_{-1}^0 \frac{3e^{4x}}{2e^{4x}+1}dx$; $\mathrm{L} = \int_0^1 xe^{-x}dx$;

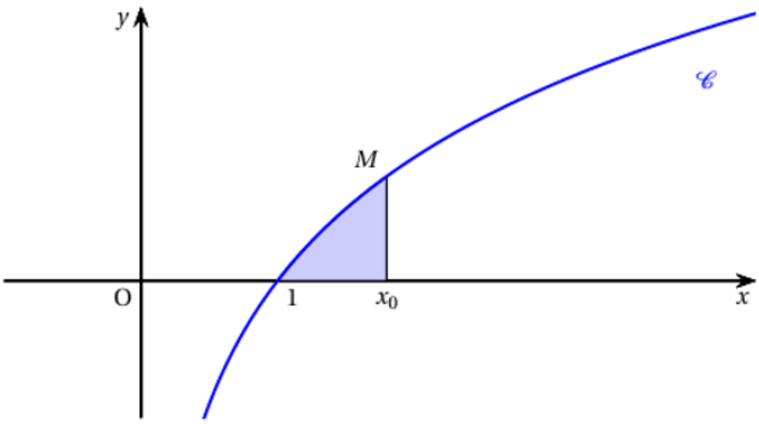
Exercice 1

Soit a un réel strictement positif.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

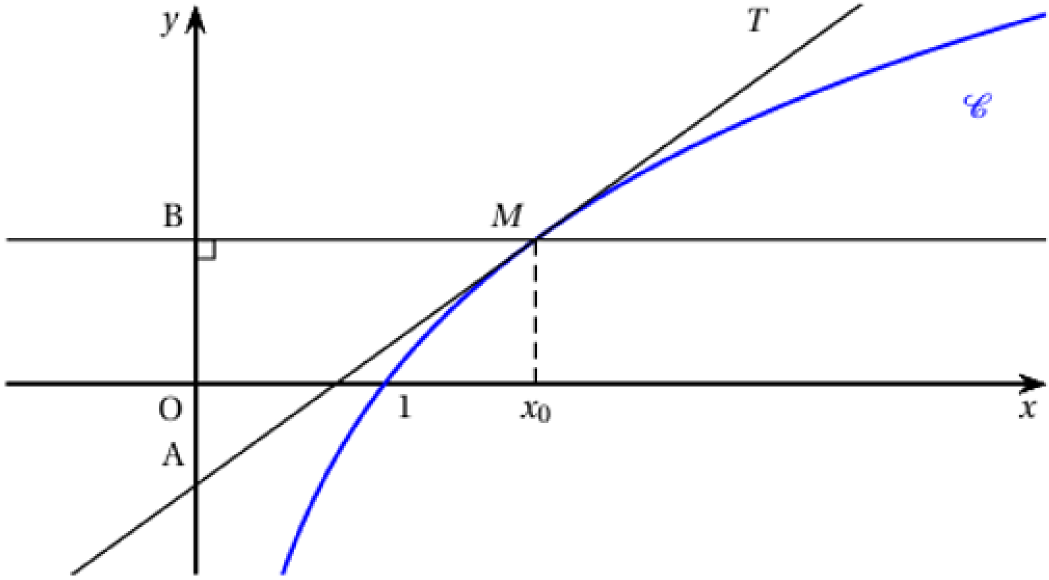
$$f(x) = a\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit x_0 un réel strictement supérieur à 1.

1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe des abscisses.
2. Vérifier que la fonction F définie par $F(x) = a[x\ln(x) - x]$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. En déduire l'aire du domaine bleuté en fonction de a et de x_0.



On note T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point M d'abscisse x_0.
On appelle A le point d'intersection de la tangente T avec l'axe des ordonnées et B le projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.



4. Démontrer que la longueur AB est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de x_0) que l'on déterminera.
Le candidat prendra soin d'expliciter sa démarche.

Exercice 2

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montage locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 2 cm (**Figure 2**).

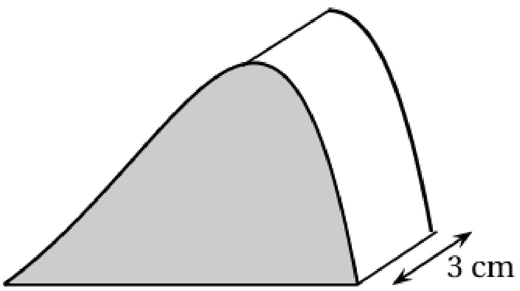


Figure 1

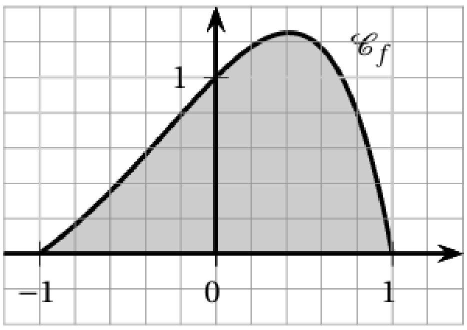


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1 ; 1]$ par :

$$f(x) = \left(1 - x^2\right) \mathrm{e}^{x}.$$

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1. **a.** Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1 ; 1]$ on a $f(x) \geqslant 0$.

b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x.$$

2. Le volume $\mathcal{V}$ de chocolat, en cm^3, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :

$$\mathcal{V} = 3 \times S$$

où S est l'aire, en cm^2, de la surface colorée (**Figure 2**).
En déduire que ce volume $\mathcal{V}$, arrondi à 0,1 cm^3 près, est égal à 4,4 cm^3.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{1-x}}.$$

Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1]$, $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}}$ (on rappelle que $\mathrm{e} = \mathrm{e}^1$).
3. Montrer alors que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \ln(2)+1-\ln(1+\mathrm{e})$.

Partie B

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[0\,;\,1]$ par :

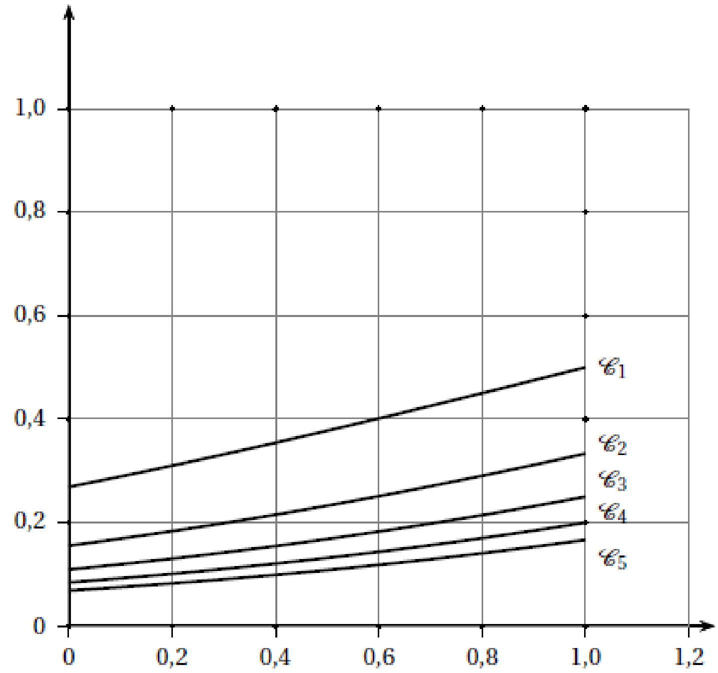
$$f_n(x) = \frac{1}{1+n\mathrm{e}^{1-x}}.$$

On note $\mathcal{C}_n$ la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.
On considère la suite de terme général

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. On a tracé en annexe les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5. Compléter le graphique en traçant la courbe $\mathcal{C}_0$ représentative de la fonction f_0.
2. Soit n un entier naturel, interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0.
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
   Démontrer cette conjecture.
4. La suite (u_n) admet-elle une limite ?*

Annexe à cet exercice :



Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

0) Etudier le sens de variation de f sur $]0\ ;\ +\infty[$, et déterminer en justifiant les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Construire son tableau de variation.

1) Matt est un esthète : il souhaite créer un domaine sous la courbe de cette fonction d'aire égale à celle d'un disque *de rayon* 1*,* ce domaine s'appuyant entre les droites d'équations respectives : $x = 1$ et $x = \lambda$. Déterminer la valeur du réel $\lambda > 1$ pour qu'il en soit ainsi.

2) Matt est aussi un matheux : il se pose la question de savoir si le domaine noté D_a situé sous la courbe entre les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$ admet une aire finie lorsque a tend vers $+\infty$. L'aider à résoudre ce problème. Ce résultat est-il contraire à votre intuition et au fait que la courbe de f admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$?

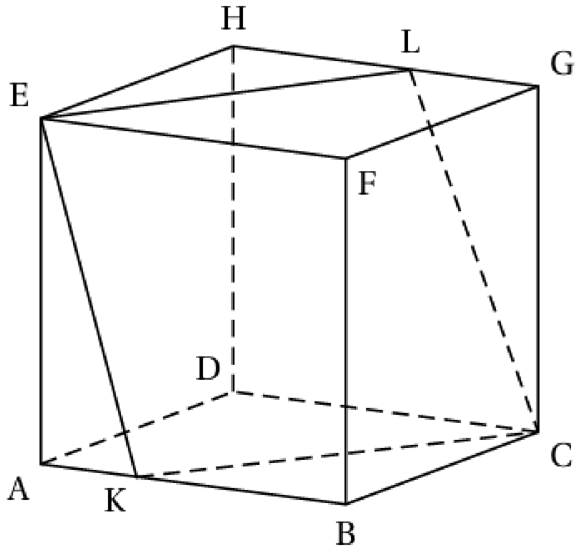
3*a*) Etudier la position relative de la courbe représentative de f et de l'hyperbole d'équation : $y = \frac{1}{x}$.

b) Représenter puis calculer l'aire du domaine $\mathfrak{D}$ formé par l'ensemble des points M(x ; y) du plan tels que : $e \le x \le e^2$ et $\dfrac{1}{x} \le y \le \dfrac{\ln(x)}{x}$

Exercice 5 ***(facultatif, révision sur l'espace)***

On considère un cube ABCDEFGH et l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.
Pour tout réel m appartenant à l'intervalle $[0;\ 1]$, on considère les points K et L de coordonnées :

$$K(m\,;\,0\,;\,0) \quad \text{et} \quad L(1-m\,;\,1\,;\,1).$$



1. Donner les coordonnées des points E et C dans ce repère.
2. Dans cette question, $m = 0$. Ainsi, le point L$(1\,;\,1\,;\,1)$ est confondu avec le point G, le point K$(0\,;\,0\,;\,0)$ est confondu avec le point A et le plan (LEK) est donc le plan (GEA).

   a. Justifier que le vecteur $\overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est normal au plan (GEA).

   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (GEA).

On s'intéresse désormais à la nature de CKEL en fonction du paramètre m.

3. Dans cette question, m est un réel quelconque de l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   a. Démontrer que CKEL est un parallélogramme.

   b. Justifier que $\overrightarrow{KC}\cdot\overrightarrow{KE} = m(m-1)$.

   c. Démontrer que CKEL est un rectangle si, et seulement si, $m = 0$ ou $m = 1$.

4. Dans cette question, $m = \dfrac{1}{2}$.Ainsi, L a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,1\,;\,1\right)$ et K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,0\,;\,0\right)$.

   a. Démontrer que le parallélogramme CKEL est alors un losange.

   b. À l'aide de la question **3. b.**, déterminer une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{CKE}$.