

**Nota bene :** ce travail est à rendre pour le 29 Avril. Il fait une synthèse sur le calcul intégral et fait revoir quelques autres points pour le baccalauréat.

Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.

Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

**Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.**

### **Exercice 0**

Calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2e^x \sin(x) + 2\cos(x)) dx \quad ; \quad J = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad ; \quad K = \int_{-1}^0 \frac{3e^{4x}}{2e^{4x}+1} dx \quad ; \quad L = \int_0^1 xe^{-x} dx ;$$

### **Exercice 1**

Soit  $a$  un réel strictement positif.

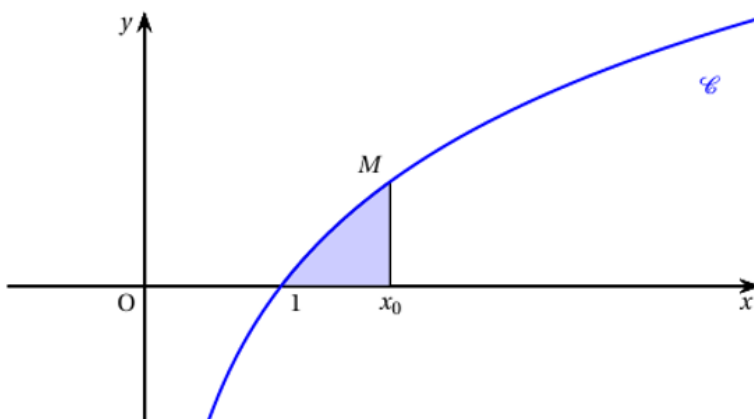
On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par

$$f(x) = a \ln(x).$$

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

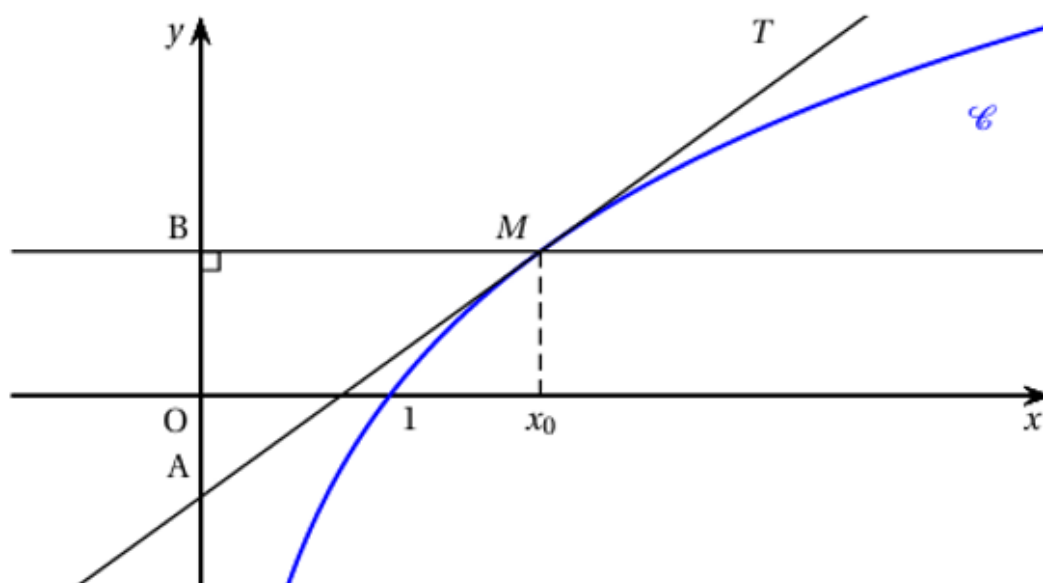
Soit  $x_0$  un réel strictement supérieur à 1.

1. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe  $\mathcal{C}$  et de l'axe des abscisses.
2. Vérifier que la fonction  $F$  définie par  $F(x) = a[x \ln(x) - x]$  est une primitive de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .
3. En déduire l'aire du domaine bleuté en fonction de  $a$  et de  $x_0$ .



On note  $T$  la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point  $M$  d'abscisse  $x_0$ .

On appelle  $A$  le point d'intersection de la tangente  $T$  avec l'axe des ordonnées et  $B$  le projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe des ordonnées.

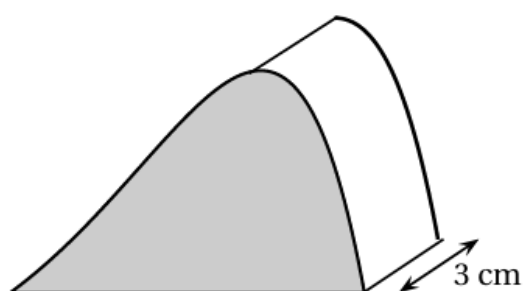


4. Démontrer que la longueur  $AB$  est égale à une constante (c'est-à-dire à un nombre qui ne dépend pas de  $x_0$ ) que l'on déterminera.

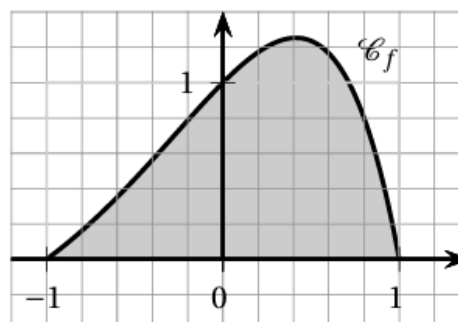
*Le candidat prendra soin d'explicitier sa démarche.*

### Exercice 2

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montagne locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 2 cm (**Figure 2**).



**Figure 1**



**Figure 2**

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  définie sur  $[-1; 1]$  par :

$$f(x) = (1 - x^2) e^x.$$

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1. a. Justifier que pour tout  $x$  appartenant à l'intervalle  $[-1; 1]$  on a  $f(x) \geq 0$ .

**b.** Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_{-1}^1 x e^x dx.$$

**2.** Le volume  $\mathcal{V}$  de chocolat, en  $\text{cm}^3$ , nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :

$$\mathcal{V} = 3 \times S$$

où  $S$  est l'aire, en  $\text{cm}^2$ , de la surface colorée (**Figure 2**).

En déduire que ce volume  $\mathcal{V}$ , arrondi à  $0,1 \text{ cm}^3$  près, est égal à  $4,4 \text{ cm}^3$ .

### Exercice 3

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{1-x}}.$$

#### Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0; 1]$ .
2. Démontrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$ ,  $f(x) = \frac{e^x}{e^x + e}$  (on rappelle que  $e = e^1$ ).
3. Montrer alors que  $\int_0^1 f(x) dx = \ln(2) + 1 - \ln(1 + e)$ .

#### Partie B

Soit  $n$  un entier naturel. On considère les fonctions  $f_n$  définies sur  $[0; 1]$  par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + ne^{1-x}}.$$

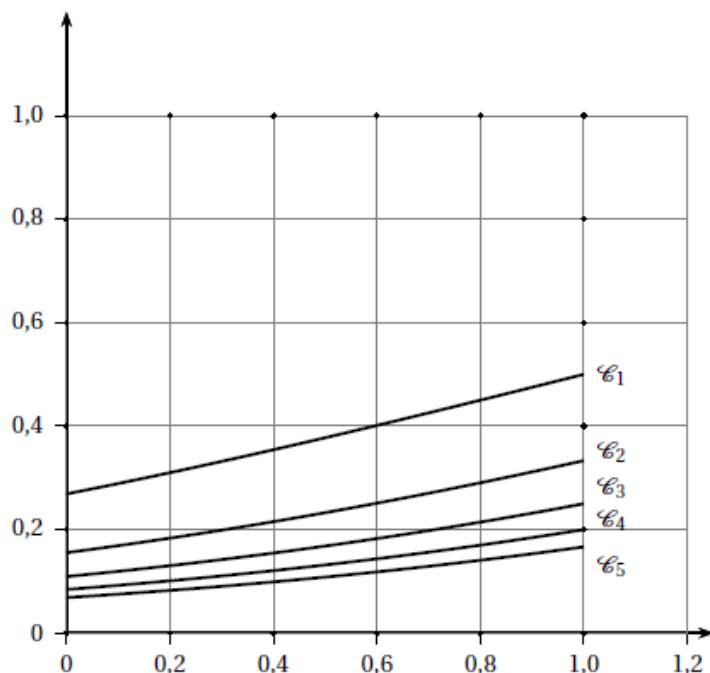
On note  $\mathcal{C}_n$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$  dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On considère la suite de terme général

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

1. On a tracé en annexe les courbes représentatives des fonctions  $f_n$  pour  $n$  variant de 1 à 5. Compléter le graphique en traçant la courbe  $\mathcal{C}_0$  représentative de la fonction  $f_0$ .
2. Soit  $n$  un entier naturel, interpréter graphiquement  $u_n$  et préciser la valeur de  $u_0$ .
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite  $(u_n)$ ?  
Démontrer cette conjecture.
4. La suite  $(u_n)$  admet-elle une limite?\*

Annexe à cet exercice :



#### **Exercice 4**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0 ; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ .

0) Etudier le sens de variation de  $f$  sur  $]0 ; +\infty[$ , et déterminer en justifiant les limites de  $f$  aux bornes de son ensemble de définition. Construire son tableau de variation.

1) Matt est un esthète : il souhaite créer un domaine sous la courbe de cette fonction d'aire égale à celle d'un disque de rayon 1, ce domaine s'appuyant entre les droites d'équations respectives :  $x = 1$  et  $x = \lambda$ . Déterminer la valeur du réel  $\lambda > 1$  pour qu'il en soit ainsi.

2) Matt est aussi un matheux : il se pose la question de savoir si le domaine noté  $D_a$  situé sous la courbe entre les droites d'équation  $x = 1$  et  $x = a$  admet une aire finie lorsque  $a$  tend vers  $+\infty$ . L'aider à résoudre ce problème. Ce résultat est-il contraire à votre intuition et au fait que la courbe de  $f$  admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en  $+\infty$  ?

3a) Etudier la position relative de la courbe représentative de  $f$  et de l'hyperbole d'équation :  $y = \frac{1}{x}$ .

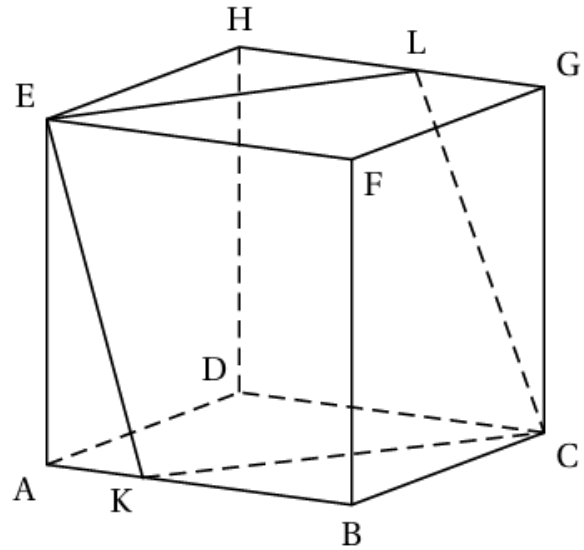
b) Représenter puis calculer l'aire du domaine  $\mathcal{D}$  formé par l'ensemble des points  $M(x ; y)$  du plan tels que :  $e \leq x \leq e^2$  et  $\frac{1}{x} \leq y \leq \frac{\ln(x)}{x}$

**Exercice 5 (facultatif, révision sur l'espace)**

On considère un cube ABCDEFGH et l'espace est rapporté au repère orthonormal  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ .

Pour tout réel  $m$  appartenant à l'intervalle  $[0; 1]$ , on considère les points  $K$  et  $L$  de coordonnées :

$$K(m; 0; 0) \quad \text{et} \quad L(1-m; 1; 1).$$



1. Donner les coordonnées des points E et C dans ce repère.
2. Dans cette question,  $m = 0$ . Ainsi, le point  $L(1; 1; 1)$  est confondu avec le point G, le point  $K(0; 0; 0)$  est confondu avec le point A et le plan (LEK) est donc le plan (GEA).

a. Justifier que le vecteur  $\overrightarrow{DB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  est normal au plan (GEA).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (GEA).

On s'intéresse désormais à la nature de CKEL en fonction du paramètre  $m$ .

3. Dans cette question,  $m$  est un réel quelconque de l'intervalle  $[0; 1]$ .
  - a. Démontrer que CKEL est un parallélogramme.
  - b. Justifier que  $\overrightarrow{KC} \cdot \overrightarrow{KE} = m(m-1)$ .
  - c. Démontrer que CKEL est un rectangle si, et seulement si,  $m = 0$  ou  $m = 1$ .
4. Dans cette question,  $m = \frac{1}{2}$ . Ainsi, L a pour coordonnées  $(\frac{1}{2}; 1; 1)$  et K a pour coordonnées  $(\frac{1}{2}; 0; 0)$ .
  - a. Démontrer que le parallélogramme CKEL est alors un losange.
  - b. À l'aide de la question 3. b., déterminer une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle  $\widehat{CKE}$ .