***Nota bene* : ce travail est à rendre pour le 31 Mars. Il fait une synthèse sur les chapitres équations différentielles, fonctions et sur l'espace. Il est assez long, attention de vous y prendre assez tôt.**

Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.
Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

Exercice I

PARTIE A

On considère l'équation différentielle

$$(E): \quad y' + \frac{1}{4}y = 20\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x},$$

d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

1. Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = ax\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E).
2. On considère l'équation différentielle

$$(E'): \quad y' + \frac{1}{4}y = 0,$$

   d'inconnue y, fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
   Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E').
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

Remarque : pour la question 3), on admet le résultat suivant évoqué en cours qu'il faut retenir vu qu'on l'utilise ici : Lorsqu'on a une équation écrite sous la forme (E_0) : y' + ay = 0, on dit que c'est une équation différentielle dont le second membre est nul.

Lorsque l'équation est écrite sous la forme (E) : y'+ay = **b** (b désigne une fonction, non nécessairement constante), on dit qu'on a une équation différentielle avec second membre (ici la fonction b est le second membre).

Les solutions de l'équation différentielle (E) sont exactement formées par les fonctions qui sont la somme des solutions de (E_0) et d'une solution particulière de (E), c'est-à-dire d'une fonction f qui vérifie : f' + af = b sur l'intervalle d'étude.

Cela se comprend facilement, car si deux fonctions sont solutions de (E), alors leur différence est solution de (E_0).

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = (20x+8)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. De plus, on admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

1. **a.** Justifier que, pour tout réel x positif,

$$f'(x) = (18-5x)\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x}.$$

   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f. On précisera la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

2. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.

   a. Justifier que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[14\,;\,15]$.

   b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction solution_equation ci-contre, écrite en langage Python :

a	14				
b	15				
$b-a$	1				
m	14,5				
Condition $f(m) > 8$	FAUX				

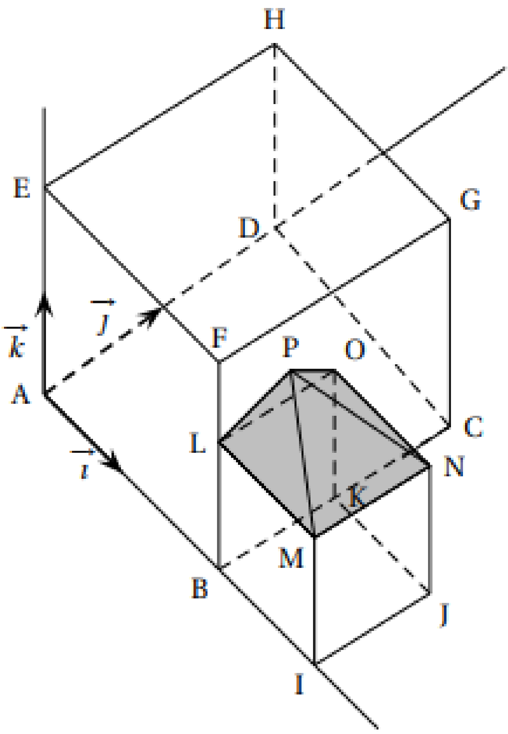
```
from math import exp
def f(x) :
    return (20*x+8)*exp(-1/4*x)

def solution_equation() :
    a,b = 14,15
    while b-a > 0.1 :
        m = (a+b)/2
        if f(m) > 8 :
        |   a = m
        else :
        |   b = m
    return a,b
```

c. Quel est l'objectif de la fonction solution_equation dans le contexte de la question ?

Exercice II

La figure ci-dessous correspond à la maquette d'un projet architectural.
Il s'agit d'une maison de forme cubique (ABCDEFGH) accolée à un garage de forme cubique (BIJKLMNO) où L est le milieu du segment [BF] et K est le milieu du segment [BC].
Le garage est surmonté d'un toit de forme pyramidale (LMNOP) de base carrée LMNO et de sommet P positionné sur la façade de la maison.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, avec $\vec{\imath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\vec{\jmath} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

1. **a.** Par lecture graphique, donner les coordonnées des points H, M et N.
   b. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HM).
2. L'architecte place le point P à l'intersection de la droite (HM) et du plan (BCF).
   Montrer que les coordonnées de P sont $\left(2\,;\ \frac{2}{3}\,;\ \frac{4}{3}\right)$.
3. **a.** Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$.
   b. Calculer la distance PM.
   On admet que la distance PN est égale à $\frac{\sqrt{11}}{3}$.
   c. Pour satisfaire à des contraintes techniques, le toit ne peut être construit que si l'angle $\widehat{MPN}$ ne dépasse pas 55°.
   Le toit pourra-t-il être construit ?
4. Justifier que les droites (HM) et (EN) sont sécantes.
   Quel est leur point d'intersection ?

Exercice III

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$.
On considère les points

$$A(1\,;\,0\,;\,-1),\quad B(3\,;\,-1\,;\,2),\quad C(2\,;\,-2\,;\,-1)\quad \text{et}\quad D(4\,;\,-1\,;\,-2).$$

On note Δ la droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& 2+t\\ z &=& -1+t\end{array}\right.\text{, avec } t\in\mathbb{R}.$$

1. **a.** Montrer que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera $\mathscr{P}$.
   b. Montrer que la droite (CD) est orthogonale au plan $\mathscr{P}$.
   Sur le plan $\mathscr{P}$, que représente le point C par rapport à D?
   c. Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est : $2x+y-z-3=0$.
2. **a.** Calculer la distance CD.
   b. Existe-t-il un point M du plan $\mathscr{P}$ différent de C vérifiant $MD=\sqrt{6}$? Justifier la réponse.
3. **a.** Montrer que la droite Δ est incluse dans le plan $\mathscr{P}$.
   Soit H le projeté orthogonal du point D sur la droite Δ.
   b. Montrer que H est le point de Δ associé à la valeur $t=-2$ dans la représentation paramétrique de Δ donnée ci-dessus.
   c. En déduire la distance du point D à la droite Δ.

Exercice IV

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$, on considère les points

$$A(-1\,;\,-3\,;\,2),\qquad B(3\,;\,-2\,;\,6)\quad \text{et}\quad C(1\,;\,2\,;\,-4).$$

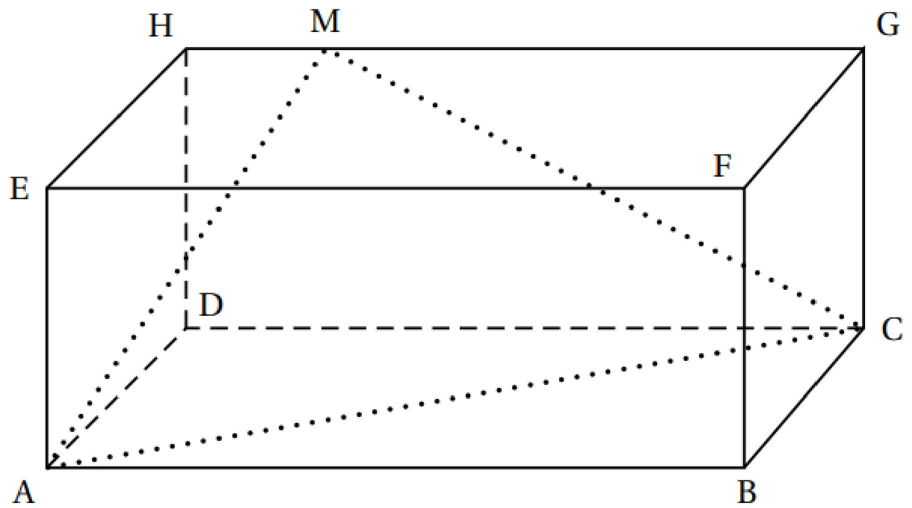
1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera $\mathscr{P}$.
2. **a.** Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}13\\-16\\-9\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathscr{P}$.
   b. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan P est $13x-16y-9z-17=0$.

On note $\mathscr{D}$ la droite passant par le point $F(15\,;\,-16\,;\,-8)$ et orthogonale au plan $\mathscr{P}$.

3. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$.
4. On appelle E le point d'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du plan $\mathscr{P}$.
   Démontrer que le point E a pour coordonnées $(2;0;1)$.
5. Déterminer la valeur exacte de la distance du point F au plan $\mathscr{P}$.
6. Déterminer les coordonnées du ou des point(s) de la droite $\mathscr{D}$ dont la distance au plan $\mathscr{P}$ est égale à la moitié de la distance du point F au plan $\mathscr{P}$.

Exercice V

Dans la figure ci-dessous, ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que $AB = 5$, $AD = 3$ et $AE = 2$.
L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine A dans lequel les points B, D et E ont respectivement pour coordonnées $(5\,;0\,;0)$, $(0\,;3\,;0)$ et $(0\,;0\,;2)$.



1. **a.** Donner, dans le repère considéré, les coordonnées des points H et G.
   b. Donner une représentation paramétrique de la droite (GH).

2. Soit M un point du segment [GH] tel que $\overrightarrow{HM} = k\overrightarrow{HG}$ avec k un nombre réel de l'intervalle $[0\,;1]$.
   a. Justifier que les coordonnées de M sont $(5k\,;3\,;2)$.
   b. En déduire que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CM} = 25k^2 - 25k + 4$.
   c. Déterminer les valeurs de k pour lesquelles AMC est un triangle rectangle en M.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère que le point M a pour coordonnées $(1\,;3\,;2)$.
On admet que le triangle AMC est rectangle en M .
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule $\dfrac{1}{3} \times \text{Aire de la base} \times h$ où h est la hauteur relative à la base.

3. On considère le point K de coordonnées $(1\,;3\,;0)$.
   a. Déterminer une équation cartésienne du plan (ACD).
   b. Justifier que le point K est le projeté orthogonal du point M sur le plan (ACD).
   c. En déduire le volume du tétraèdre MACD.

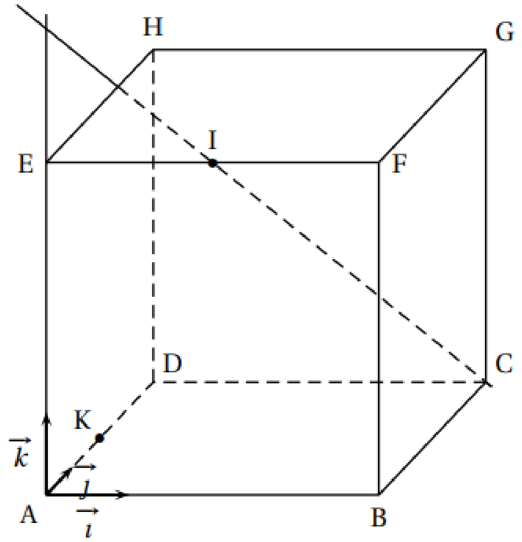
4. On note P le projeté orthogonal du point D sur le plan (AMC).
   Calculer la distance DP; en donner une valeur arrondie à 10^{-1}.

Exercice VI

On considère un repère orthonormé $\left(A\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\,,\,\vec{k}\right)$ de l'espace dans lequel on place le points

$$B(4\,;0\,;0),\quad D(0\,;4\,;0),\quad E(0\,;0\,;4)$$

et les points C, F, G et H de sorte que le solide ABCDEFGH soit un cube.



1. Donner les coordonnées des points C, F, G et H.
2. On considère le point I milieu de l'arête [EF].
   Montrer qu'une représentation paramétrique de la droite (IC) est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2+2t \\ y & = & 4t \\ z & = & 4-4t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R}.$$

3. On désigne par $\mathscr{P}$ le plan orthogonal à la droite (IC) passant par le point G, et par J l'intersection de $\mathscr{P}$ avec (IC).
   a. Démontrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ est donnée par :

$$x+2y-2z-4=0.$$

   b. Justifier que J a pour coordonnées $\left(\frac{28}{9}\,;\,\frac{20}{9}\,;\,\frac{16}{9}\right)$.
   Que représente J par rapport à C?
   c. Vérifier que le point K(0; 2; 0) appartient au plan $\mathscr{P}$.
   d. Justifier que (BK) est l'intersection des plans $\mathscr{P}$ et (ABC).

4. On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par la formule $V=\dfrac{B\times h}{3}$, où B est l'aire d'une base et h la longueur de la hauteur relative à cette base.

a. Déterminer le volume de la pyramide CBKG.
b. En déduire que l'aire du triangle BKG est égale à 12.
c. Justifier que la droite (BG) est incluse dans $\mathscr{P}$.
d. On note I′ un point de l'arête [EF], et P' le plan orthogonal à la droite (I′ C) passant par G.
Peut-on affirmer que la droite (BG) est incluse dans P' ?

Exercice VII ***(facultatif)***

L'espace est muni d'un repère orthonormé (O; I, J, K).
On considère les points

$$A(-1\,;\,-1\,;\,0),\ B(6\,;\,-5\,;\,1),\ C(1\,;\,2\,;\,-2) \text{ et } S(13\,;\,37\,;\,54).$$

1. **a.** Justifier que les points A, B et C définissent bien un plan.
   b. Prouver que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\16\\29\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   c. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
2. **a.** Déterminer la nature du triangle ABC.
   b. Démontrer que la valeur exacte de l'aire du triangle ABC est, en unités d'aire, $\dfrac{\sqrt{1122}}{2}$.
3. **a.** Prouver que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
   b. La droite (Δ) perpendiculaire au plan (ABC) passant par le point S coupe le plan (ABC) en un point noté H.
   Déterminer les coordonnées du point H.
4. Déterminer le volume du tétraèdre SABC.