***Nota bene** : ce travail est à rendre pour le 13 Mars. Il fait une synthèse sur le chapitre primitives et équations différentielles.*

Vous rendrez un seul lot de copies DOUBLES par groupe de 3 ou 4 élèves, avec les noms de CHACUN des élèves constituant le groupe sur chaque copie du lot.

Des exercices (ou copies) identiques d'un groupe à l'autre conduiront à l'arrêt de la correction de votre copie et à l'absence de note pour le DM, et ce pour le groupe ayant recopié ainsi que celui ayant fourni la solution.
Vous apporterez le plus grand soin à la présentation de la copie, en soulignant et encadrant à l'aide d'une règle les éléments essentiels de votre rédaction. Les copies dont la présentation laisse à désirer seront pénalisées.

Les copies rendues en retard ou ne respectant pas ces consignes ne seront pas corrigées.

***Exercice I** (calculs tout en finesse de primitives)*

1) Prouver dans les cas suivantes que la fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I.

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x}\ ;\ F(x) = x - \ln(1+e^x)\ ;\ I = \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{1}{x\ln x}\ ;\ F(x) = \ln(\ln x)\ ;\ I =]1; +\infty[$$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x+2}$

Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie : $F(0) = 1$.

3) Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 2e^{-x} + \pi x^3 - 0,2x^2 + \dfrac{2}{7}x - 11$; $g(x) = 5\sin(x) + 4e^{\frac{2x}{7}} - 4e^{-5x}$;

4) Exercices numéro : 56 page 383 du livre ; 41 *b*) seulement page 382 ; 42 *b*) page 382 ; 45 page 382

53 page 383 ; 48 *b*) page 383 ; 50 page 383

5) Une dernière question déjà plus sympathique : (***uniquement pour ceux voulant aller en CPGE***).

f est la fonction définie sur $]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \tan(x) \overset{déf.}{=} \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

a) Vérifier que $f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$

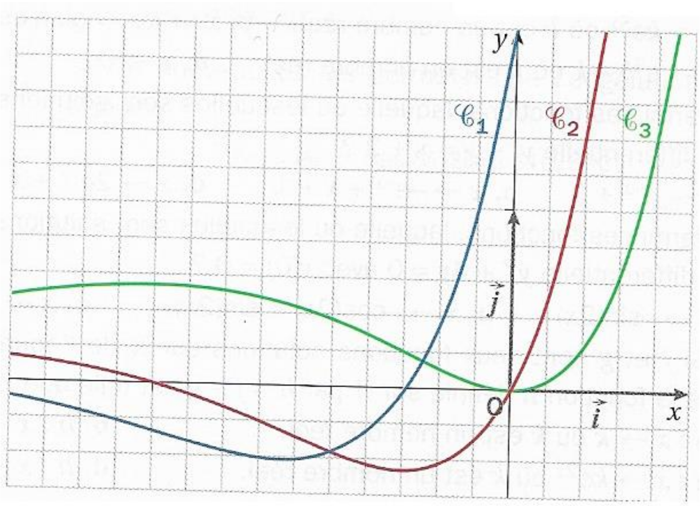
b) En déduire la primitive G de la fonction g définie sur $]-\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \dfrac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ et qui s'annule en 0.

c) En déduire les primitives de la fonction h définie sur $]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}[$ par : $h(x) = tan^2(x)$.

Exercice III

On donne ci-dessous la représentation graphique de trois fonctions sur un intervalle I : f, sa dérivée f' et une de ses primitives F.

Identifier, en justifiant, chacune de des courbes.



Exercice IV

Exercices : 72 page 384 ; 75 page 384 ; 78 page 384 ; 81 page 384.

Exercice V

Une étude s'intéresse au nombre de foyers possédant un écran plat à partir de l'an 2005.

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de foyers avec écran plat l'année x.

L'étude commence en 2005 : $x = 0$ correspond à l'année 2005.

En 2005, il y avait un million de foyers avec écran plat.

0) Que vaut $g(0)$?

On admet que g ne s'annule pas sur $[0\ ;\ +\infty[$, et que g est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle : (E) : $y' = \frac{1}{20}y(10-y)$.

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0\,;\,+\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$.

   a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}_1) \quad : \; z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

   b. Résoudre l'équation (E_1) et en déduire les solutions de l'équation (E).

2. Montrer que g est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{10}{9\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.

3. Étudier les variations de g sur $[0\,;\,+\infty[$.

4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

Exercice VI

On considère l'équation différentielle

$$(E_0) : \quad y' = y$$

où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle (E_0) est la fonction nulle.
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle (E_0).

   On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$$

   où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.
3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2\cos(x) + \sin(x)$.

   On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E).
4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

   Démontrer que : « f est solution de (E) » est équivalent à « $f - h$ est solution de (E_0) ».
5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle (E) telle que $g(0) = 0$.