Exercice I

1.

Réponse C : $y = -2$

2.

a) **Affirmation 1** : fausse : c'est la droite verticale d'équation : $x = 2$ qui est asymptote verticale à la courbe de f, au vu du tableau de variation et de la limite en 2 qui est égale à $-\infty$.

b) **Affirmation 2** : fausse : en effet par lecture du tableau, la limite de f en $-\infty$ est égale à 5, (5^-) par valeur inférieure de surcroit, au vu de la décroissance de f sur $]-\infty\,;-2[$.

Donc par limite de somme, $f - 5$ tend vers 0^- en $-\infty$, et par limite de quotient, la limite cherchée $-\infty$ (car $1/x$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers 0^-).

Exercice II

L'ordre des questions a été inversé ☹

$f(x) = \dfrac{3e^x}{e^x+2}$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x+2) = 2$.

Donc par limite de quotient, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$: l'axe des abscisses (équation $y=0$) est donc asymptote horizontale à la courbe représentant f en $-\infty$.

2) Cherchons $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3e^x}{e^x+2}$ (F.I a priori).

Or, $\dfrac{3e^x}{e^x+2} = \dfrac{3e^x}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)} = \dfrac{3}{1+\frac{2}{e^x}}$: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{2}{e^x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 = 3$, donc par limite de quotient : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3}$

La droite d'équation $y=3$ est A.S.H à $\mathcal{C}_f$ (courbe de f) en $+\infty$.

Exercice III

1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc $2 \geqslant -2\sin(x) \geqslant -2$, donc $5 \geqslant -2\sin(x)+3 \geqslant 1$.

Par suite comme pour tout réel x, $e^{-4x} > 0$, on a : $5e^{-4x} \geqslant (-2\sin(x)+3)e^{-4x} \geqslant e^{-4x}$

Bref : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad e^{-4x} \leqslant f(x) \leqslant 5e^{-4x}$. $(*)$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty}(-4x) = -\infty$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^{X} = 0$, donc par composition : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-4x} = 0$ $(**)$, donc on a par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} 5e^{-4x} = 0$. $(***)$

d'après le théorème des gendarmes, $(*)$, $(**)$ et $(***)$ permettent de dire que : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$.

2) $g(x) = (x+2)e^{-x}$

a) $\lim\limits_{x \to -\infty}(-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^{X} = +\infty$, donc par composé : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.

Puisque $\lim\limits_{x \to -\infty}(x+2) = -\infty$, on a par limite de produit : $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty}$

b) $g(x) = (x+2)e^{-x} = \dfrac{x+2}{e^{x}} = \dfrac{x}{e^{x}} + \dfrac{2}{e^{x}}$.

Par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$, donc par quotient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = 0$.

De plus, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$, donc par quotient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{e^{x}} = 0$,

Ainsi, par limite de somme : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0}$.

Exercice IV

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} e^x = e$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x-1)=0^-$, donc par quotient : $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{e^x}{x-1} = -\infty}$.

Pour $x\neq 0$: $x^3+2x^2+1 = x^3\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)$.

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty}$; et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3}=0$. donc par produit et somme :

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)=1}$, et enfin par produit : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+2x^2+1)=-\infty}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{31x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{31}\times 31x\, e^{31x}\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(31x)=-\infty$

or par croissances comparées, $\lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X=0$, donc par composition de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} 31xe^{31x}=0$

Par suite, par limite de produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{31x}=0}$.

Pour $x>0$: $\dfrac{x^3+x+3}{x^2-4x+1} = \dfrac{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \dfrac{x\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}{1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}$.

Par limites de référence : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$.

donc par somme : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)=1$, et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=1$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$, on a par quotient et produit de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3+x+3}{x^2-4x+1}=+\infty$.

Enfin, comme $\lim\limits_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty$, par composition de limites, on a : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^3+x+3}{x^2-4x+1}}=+\infty}$.

Exercice V

$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\cos(2024x^2)+2x-2025$.

a) $\forall X\in\mathbb{R}$, $\cos(X)\geqslant -1$, donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $\cos(2024x^2)\geqslant -1$ et par suite, on a :

$\underbrace{\cos(2024x^2)+2x-2025}_{f(x)} \geqslant -1+2x-2025$

$f(x)\geqslant 2x-2026$

Vu que $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-2026)=+\infty$, par théorème de comparaison de limites :

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.}$

b) de même : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\cos(2024x^2)\leqslant 1$, donc $f(x)\leqslant 2x-2024$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-2024)=-\infty$, donc par comparaison de limites, $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty.}$