Exercice I

Partie A

a) $f'(0)$ = coefficient directeur de $\mathcal{T}$. Or $\mathcal{T}$ passe par $A(0\,;\frac{1}{2})$ et $B(1\,;\frac{5}{4})$

donc $\boxed{f'(0)} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}}{1-0} = \dfrac{\frac{5}{4}-\frac{2}{4}}{1} = \boxed{\dfrac{3}{4}}$.

Cela s'obtient par lecture graphique (avec la méthode de l'escalier).

b) $\boxed{f \text{ semble convexe sur }]-\infty\,;0] \text{ et concave sur } [0\,;+\infty[}$ car graphiquement, sur $]-\infty\,;0]$ $\mathcal{C}_f$ semble être située AU-DESSUS de chacune de ses tangentes et le phénomène inverse sur $[0\,;+\infty[$.

Partie B

1) $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-3x}} = \dfrac{1}{v(x)}$ où $\begin{cases} v(x) = 1+e^{-3x} \\ v'(x) = 0 - 3e^{-3x} = -3e^{-3x}. \end{cases}$

donc $\boxed{f'(x)} = \dfrac{-v'(x)}{v^2(x)} = \boxed{\dfrac{3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2}}$

2) Pour tout réel x, $e^{-3x} > 0$ et $3 > 0$, donc $3e^{-3x} > 0$.

de plus, $1+e^{-3x} > 1 > 0$, donc $(1+e^{-3x})^2 > 0$.

D'après la règle des signes d'un quotient, pour tout réel x, $\dfrac{3e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2} > 0$, donc $f'(x) > 0$.

donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

3) $\mathcal{T}$ a pour équation réduite : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, c'est à dire : $y = f'(0)x + f(0)$.

Or, $f'(0) \overset{q.1}{=} \dfrac{3e^0}{(1+e^0)^2} = \dfrac{3}{2^2} = \dfrac{3}{4}$ et $f(0) = \dfrac{1}{1+e^0} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

Ainsi $\boxed{\mathcal{T} \text{ a pour équation réduite : } y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}}$

4) a) $f''(x) = \dfrac{9e^{-3x}\left(e^{-3x}-1\right)}{\left(1+e^{-3x}\right)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-3x} > 0$ et comme à la question 2), $\dfrac{9e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2} > 0$.

Donc $f''(x)$ a le même signe que $e^{-3x}-1$.

Ainsi, $f''(x) \geq 0$ équivaut à

$$e^{-3x}-1 \geq 0$$
$$e^{-3x} \geq 1$$
$$e^{-3x} \geq e^0$$
$$-3x \geq 0$$
$$x \leq \frac{0}{-3} \text{ c'est-à-dire } x \leq 0.$$

d'où :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

b) Le précédent tableau montre que $f''(x) \geq 0$ sur $]-\infty; 0]$: ainsi f est convexe sur $]-\infty; 0]$

De plus, sur $[0; +\infty[$, $f''(x) \leq 0$, donc f est concave sur $[0; +\infty[$.

Le point A d'abscisse 0 de $\mathcal{C}_f$ est donc un point d'inflexion vu que f'' s'annule et change de signe en 0.

c) Sur $[0; +\infty[$, f est concave. Donc $\mathcal{C}_f$ est situé en dessous de chacune de ses tangentes sur $[0; +\infty[$.

En particulier, $\mathcal{C}_f$ est situé sous sa tangente en A, à savoir la droite $\mathcal{T}$.

Donc d'après q.3) : Pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) \leq \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$

$$0 < \frac{1}{1+e^{-3x}} \leq \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

Donc par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$, on a :

$$1+e^{-3x} \geq \frac{1}{\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}} \text{ c'est-à-dire : } 1+e^{-3x} \geq \frac{1}{\frac{3x+2}{4}}$$

ou encore : $\boxed{1+e^{-3x} \geq \dfrac{4}{3x+2}}$.

Exercice II

0) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 3$.

1) $n \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$ est la propriété : $4^n > 7n+1$:

a) Pour $n=0$, $4^0 = 1$ et $7 \times 0 + 1 = 1$. Or $1 > 1$ est une inégalité fausse, donc $\underline{\mathcal{P}(0) \text{ est fausse}}$.

b) Pour $n=2$: $4^2 = 16$ et $7 \times 2 + 1 = 15$. Or $16 > 15$ est une inégalité vraie, donc $\underline{\mathcal{P}(2) \text{ est vraie}}$

c) $\mathcal{P}(n+1)$ est la propriété : $4^{n+1} > 7(n+1)+1$, c'est à dire : $\underline{4^{n+1} > 7n+8}$.

2) a) Si on tape u(1) : n vaut alors 1, et for k in range(1) signifie : $0 \leq k < 1$ avec k entier, donc k prend une seule valeur (0), et il y a une seule boucle effectuée.

$u=1$ va être après l'instruction donnée transformé en : $u = \dfrac{1^3-1}{2 \times 1+1} = 0$

En tapant <u>u(1) on aura 0 pour valeur en sortie</u> -

Si on tape u(2) : n vaut 2 et for k in range(2) signifie : $0 \leq k < 2$ et k entier, donc k vaut successivement 0 puis 1 : on fait donc deux fois la boucle (instruction après le for donnée deux fois d'affilée).

on a déjà vu qu'après le 1er tour de boucle $u=0$.

Au second tour de boucle, la valeur stockée dans u passe à : $\boxed{u} = \dfrac{0^3-1}{2 \times 0+1} = \dfrac{-1}{1} = \boxed{-1}$

$\boxed{\text{En sortie, Python affichera } -1}$

Si l'on tapait u(0), $n=0$ et $0 \leq k < 0$ est <u>une condition impossible</u>, donc le programme <u>ne donne aucune instruction</u> (on <u>n'entre pas dans la boucle for</u>).

Il renvoie en sortie la valeur initialement stockée dans u à savoir $\boxed{1}$

b) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \text{Pour tout entier naturel } n, \ u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 - 1}{2u_n + 1} \end{cases}$

Exercice III

$u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - 2n - 1$.

1a) Pour $n=0$: $u_{0+1} = u_0 - 2\times 0 - 1$, donc $\boxed{u_1} = 0 - 0 - 1 = \boxed{-1}$

Pour $n=1$: $u_{1+1} = u_1 - 2\times 1 - 1$, donc $\boxed{u_2} = -1 - 2 - 1 = \boxed{-4}$

1b)

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	0	-1	-4	-9	-16	-25	-36	-49

1c) Il semblerait que pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n = -n^2}$

2) $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{S}(n)$ la propriété : $u_n = -n^2$.

Etape d'initialisation : Pour $n=0$, on a bien $u_0 = -0^2$ car $u_0 = 0$ et que $0 = -0^2$.

donc $\mathcal{S}(0)$ est vraie.

Etape d'hérédité : Soit n un entier naturel fixé. Supposons que pour cet entier là, $\mathcal{S}(n)$ soit vraie, c'est à dire que : $\underbrace{u_n = -n^2}_{\text{hypothèse de récurrence}}$.

Montrons alors que $\mathcal{S}(n+1)$ est vraie en justifiant que : $u_{n+1} = -(n+1)^2$.

Or $u_{n+1} = u_n - 2n - 1$ (d'après l'énoncé). Et d'après l'hypothèse de récurrence,

$u_n = -n^2$, de sorte que : $u_{n+1} = -n^2 - 2n - 1 = -(n^2 + 2n + 1) = -(n+1)^2$

identité remarquable n°1.

donc $\mathcal{S}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{S}(0)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{S}(n)$ est héréditaire.

donc, d'après le principe de récurrence on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -n^2}$

Exercice IV

$u_0 = 400$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,9u_n + 60$.

1) $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $u_n = 600 - 200 \times 0,9^n$.

Initialisation : pour $n=0$, $u_0 = 400$ (énoncé) et $600 - 200 \times 0,9^0 = 600 - 200 \times 1 = 400$.

Alors $u_0 = 600 - 200 \times 0,9^0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier naturel fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie pour cet entier là.

On suppose donc que : $u_n = 600 - 200 \times 0,9^n$ (→ hypothèse de récurrence).

Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire prouvons que : $\underbrace{u_{n+1} = 600 - 200 \times 0,9^{n+1}}_{\text{But}}$.

Or d'après l'énoncé, $u_{n+1} = 0,9u_n + 60$, et d'après l'hypothèse de récurrence on sait que $u_n = 600 - 200 \times 0,9^n$.

Alors $u_{n+1} = 0,9(600 - 200 \times 0,9^n) + 60$.

$u_{n+1} = 540 - 200 \times 0,9 \times 0,9^n + 60$

$u_{n+1} = 600 - 200 \times 0,9^{n+1}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Alors d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 600 - 200 \times 0,9^n}$

2) $\forall n \in \mathbb{N}$, $0,9^n \geq 0$ et $200 \geq 0$, donc $200 \times 0,9^n \geq 0$, donc $-200 \times 0,9^n \leq 0$

donc $\underbrace{600 - 200 \times 0,9^n}_{} \leq 600$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 600$: $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est donc majorée par } 600.}$

3) Par la méthode de la différence :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n + 60 - u_n = -0,1u_n + 60$.

D'après la q.2, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 600$, donc $-0,1u_n \geq -60$ (car $-0,1 < 0$), par suite :

$-0,1u_n + 60 \geq 0$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$: $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est CROISSANTE}}$

Exercice V

Question 1 : Réponse $\boxed{B}$: $\boxed{h'(x) = (x+1)^2 e^x}$

(Il suffit de dériver un produit et de remarquer que $x^2+2x+1 = (x+1)^2$.

Question 2 : Réponse C : f est convexe sur [1 ;2] (car f' croit sur cet intervalle).

Question 3 :

Réponse D : Pour tout $x \in]5;+\infty[$, $f(x)$ et $f''(x)$ sont de même signe.

Exercice VI

$u_0 = 8$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{6u_n + 2}{u_n + 5}$.

1) $\boxed{u_1} = u_{0+1} = \dfrac{6u_0 + 2}{u_0 + 5} = \dfrac{6 \times 8 + 2}{8+5} = \boxed{\dfrac{50}{13}}$

2) a) $f(x) = \dfrac{6x+2}{x+5} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = 6x+2 \\ u'(x) = 6 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = x+5 \\ v'(x) = 1. \end{cases}$

f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

$f'(x) = \dfrac{6(x+5) - (6x+2)}{(x+5)^2}$

$\boxed{f'(x)} = \dfrac{6x+30-6x-2}{(x+5)^2} = \boxed{\dfrac{28}{(x+5)^2}}$.

Or $28 > 0$; et $x \geq 0$, donc $x+5 \geq 5 > 0$, donc $(x+5)^2 > 0$.

Par suite, pour tout réel $x \geq 0$, $f'(x) > 0$: Ainsi $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0;+\infty[}$.

b) Si $x > 2$, alors $f(x) > f(2)$ car f croit strictement sur $[0;+\infty[$, donc a fortiori sur $]2;+\infty[$

Or $f(2) = \dfrac{6 \times 2 + 2}{2+5} = \dfrac{14}{7} = 2$: Ainsi, $\boxed{\text{pour tout réel } x > 2, \text{ on a : } f(x) > 2}$

c) $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

Initialisation : Pour $n = 0$: $u_0 = 8$; $u_1 \overset{(1)}{=} \dfrac{50}{13}$ ($\approx 3,85$), donc on a bien : $2 \leq u_1 \leq u_0$.

donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit n un entier fixé tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie.

On suppose donc que : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$. (hypothèse de récurrence).

Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est à dire prouvons que : $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$

OR par hypothèse de récurrence : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

Donc par croissance de f sur $[0 ; +\infty[$: $f(2) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$.

Comme $f(2) = 2$ (question b), et que $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et que $f(u_n) = u_{n+1}$, on a bien : $2 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

alors d'après le principe de récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n}$.

d) D'après la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$, donc la suite (u_n) est décroissan