Exercice I

1. **a.** On a $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{25}{2}\end{pmatrix}$.

Or ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires et :
$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CA} = 5-5+0=0$ et
$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{DC} = 0+0+0=0$.
Conclusion : le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CAD) : il est donc normal à ce plan.

b. On sait qu'alors :
$M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{CAD}) \iff 1x-1y+0z+d=0 \iff x-y+d=0$, avec $d\in\mathbb{R}$.
Ceci est vrai pour exemple pour C :
$C(0\,;\,0\,;\,10)\in(\text{CAD}) \iff 0-1y+0+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$, soit $d=0$.
Donc $M(x\,;\,y\,;\,z)\in(\text{CAD}) \iff x-y=0$.

2. **a.** Si la droite (D) est sécante au plan (CAD) en un point H les coordonnées de ce point vérifient les équations paramétriques de (D) et celle du plan soit :

$$\text{H}(x\,;\,y\,;\,z)\in D\cap(\text{CAD}) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& +\frac{5}{2}t\\ y &=& 5-\frac{5}{2}t\\ z &=& 0t\\ x-y=0 \end{array}\right. \quad (t\in\mathbb{R}) \Rightarrow \frac{5}{2}t-\left(5-\frac{5}{2}t\right)=0 \iff$$

$5t-5=0 \iff t=1$.
Donc $\text{H}\left(\frac{5}{2}\,;\,\frac{5}{2}\,;\,0\right)$.

b. On a $M(x\,;\,y\,;\,z)\in D \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 0+\frac{5}{2}t\\ y &=& 5-\frac{5}{2}t\\ z &=& 0+0t \end{array}\right.$

On reconnait dans les coefficients de t les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\-\frac{5}{2}\\0\end{pmatrix}$, soit $\frac{5}{2}\overrightarrow{n_1}$ et

$(0;5;0)$ sont les coordonnées de B.
Donc D est la droite contenant B et de vecteur directeur $\overrightarrow{n_1}$.
Or on a vu que le vecteur $\overrightarrow{n_1}$ est normal au plan (CAD), donc la droite D est perpendiculaire à (CAD) au point H.

3. **a.** On a vu que (BH) $= D$ donc a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n_1}$.

$\overrightarrow{HA}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{5}{2}\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{HA} = \frac{5}{2}-\frac{5}{2}+0=0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{HA}$ sont orthogonaux donc les droites (BH) et (HA) sont perpendiculaires, le triangle ABH est rectangle en H.

b. On a $\left\|\overrightarrow{BH}\right\|^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} + 0 = \frac{50}{4}$, d'où $\left\|\overrightarrow{BH}\right\| = BH = \sqrt{\frac{50}{4}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ et

$\left|\overrightarrow{HA}\right\|^2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{4} + 0 = \frac{50}{4}$, d'où $\left\|\overrightarrow{HA}\right\| = HA = \sqrt{\frac{50}{4}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Donc $\mathscr{A}(ABH) = \dfrac{BH \times HA}{2} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5\sqrt{2}}{2} \times \dfrac{5\sqrt{2}}{2} = \dfrac{25 \times 2}{8} = \dfrac{25}{4}$.

4. **a.** Les points A, B et H ont une cote nulle : ils appartiennent donc au plan définis par les vecteurs unitaires $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$ et C a une abscisse et une ordonnée nulles, donc appartient à l'axe $\left(O, \overrightarrow{k}\right)$ qui est perpendiculaire au plan (ABH), donc (CO) est la hauteur contenant C du tétraèdre ABCH.

b. De façon évidente CO = 10, donc :

$\mathscr{V}(ABCH) = \dfrac{\mathscr{A}(ABH) \times CO}{3} = \dfrac{\frac{25}{4} \times 10}{3} = \dfrac{125}{6}$.

5. On a $\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}0\\-5\\10\end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 + 0 + 0 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux donc les droites (BA) et (BC) sont perpendiculaires, le triangle (ABC) est rectangle en B.

On a $BA^2 = 5^2$, donc $BA = 5$ et $BC^2 = 5^2 + 10^2 = 25 + 100 = 125$, donc $BC = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$.

L'aire du triangle (ABC) est égale à :

$\mathscr{A}(ABC) = \dfrac{AB \times BC}{2} = \dfrac{5 \times 5\sqrt{5}}{2} = \dfrac{25\sqrt{5}}{2}$.

On a $\mathscr{V}(ABCH) = \dfrac{\mathscr{A}(ABC) \times d}{3}$, d étant la distance du point H au plan (ABC).

On a donc : $\dfrac{125}{6} = \dfrac{\frac{25\sqrt{5}}{2} \times d}{3} \iff d = \dfrac{125}{6} \times \dfrac{3 \times 2}{25\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

Exercice II

Affirmation 1 : Vraie

Ici, il y a deux éléments à justifier : d'une part A, C et D définissent un plan et d'autre part, ce plan a bien l'équation annoncée.

- On a : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4-2\\4-0\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$.

  Avec $x_{\overrightarrow{AD}} = -x_{\overrightarrow{AC}}$ mais $y_{\overrightarrow{AD}} \neq -y_{\overrightarrow{AC}}$, il est évident que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires, donc que les points A, C et D ne sont pas alignés, et donc :

  A, C et D définissent un plan;

- le plan d'équation $8x - 5y + 4z - 16 = 0$ admet pour vecteur normal $\overrightarrow{n_1}$, de coordonnées $\begin{pmatrix}8\\-5\\4\end{pmatrix}$.

  On a : $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{AC} = 8 \times 2 - 5 \times 4 + 4 \times 1 = 16 - 20 + 4 = 0$

  et $\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{AD} = 8 \times (-2) - 5 \times 0 + 4 \times 4 = -16 - 0 + 16 = 0$

  $\overrightarrow{n_1}$ est donc bien orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ACD), donc $\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal au plan (ACD).

  Le plan dont on a l'équation partage un vecteur normal avec (ACD) : ces deux plans sont parallèles.

  Comme, de plus, $8x_A - 5y_A + 4z_A - 16 = 8 \times 2 - 5 \times 0 + 4 \times 0 - 16 = 16 - 16 = 0$

  on en déduit que les coordonnées de A vérifient l'équation donnée, et donc que A est dans le plan dont on a l'équation, ce plan est donc confondu avec (ACD).

Finalement, on a bien confirmé que les points A, C et D définissent un plan $\mathscr{P}$ d'équation $8x - 5y + 4z - 16 = 0$.

Remarque : pour le deuxième point de cette question, on pouvait aussi vérifier que A, C et D avaient des coordonnées vérifiant l'équation donnée, cela revenait au même.

Affirmation 2 : Fausse

Puisque l'on sait que A, C et D définissent le plan $\mathscr{P}$ d'équation $8x-5y+4z-16=0$, alors on a : les points A, B, C et D sont coplanaires $\iff B \in \mathscr{P}$

$$\begin{aligned}
&\iff 8x_B - 5y_B + 4z_B - 16 = 0\\
&\iff 8\times 0 - 5\times 4 + 4\times 3 - 16 = 0\\
&\iff 0 - 20 + 12 - 16 = 0\\
&\iff -24 = 0
\end{aligned}$$

Comme $-24 \neq 0$, on en déduit que B n'appartient pas à $\mathscr{P}$, et donc que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Affirmation 3 : Vraie

les droites (AC) et (BH) sont dirigées par $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix}$ respectivement. Comme ces vecteurs sont visiblement non colinéaires, les droites sont soit sécantes, soit non coplanaires.

Pour chercher un éventuel point d'intersection, on a donné des représentations paramétriques des deux droites :

$$(AC)\begin{cases}x=2+2s\\y=4s\\z=s\end{cases}\quad \text{où } s\in\mathbb{R} \qquad (BH)\begin{cases}x=-t\\y=4-3t\\z=3-t\end{cases}\quad \text{où } t\in\mathbb{R}.$$

Si on considère M_s le point de paramètre s sur la droite (AC) et N_t le point de paramètre t sur (BH), alors :

$$\begin{aligned}
M_s = N_t &\iff \begin{cases}2+2s=-t\\4s=4-3t\\s=3-t\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}2+2(3-t)=-t\\4(3-t)=4-3t\\s=3-t\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}2+6-2t=-t\\12-4t=4-3t\\s=3-t\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}8=-t+2t\\12-4=-3t+4t\\s=3-t\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}t=8\\t=8\\s=3-8\end{cases}\\
&\iff \begin{cases}t=8\\t=8\\s=-5\end{cases}
\end{aligned}$$

Le système a une unique solution, donc les deux droites ont un unique point commun, c'est M_{-5}, qui est confondu avec N_8, autrement dit, le point de coordonnées : $(-8\,;\,-20\,;\,-5)$. Les droites sont bien sécantes.

Affirmation 4 : Vraie.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$, *donc* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = xx' + yy' + zz' = -2\times2+4\times4+3\times1 = -4+16+3 = 15$.

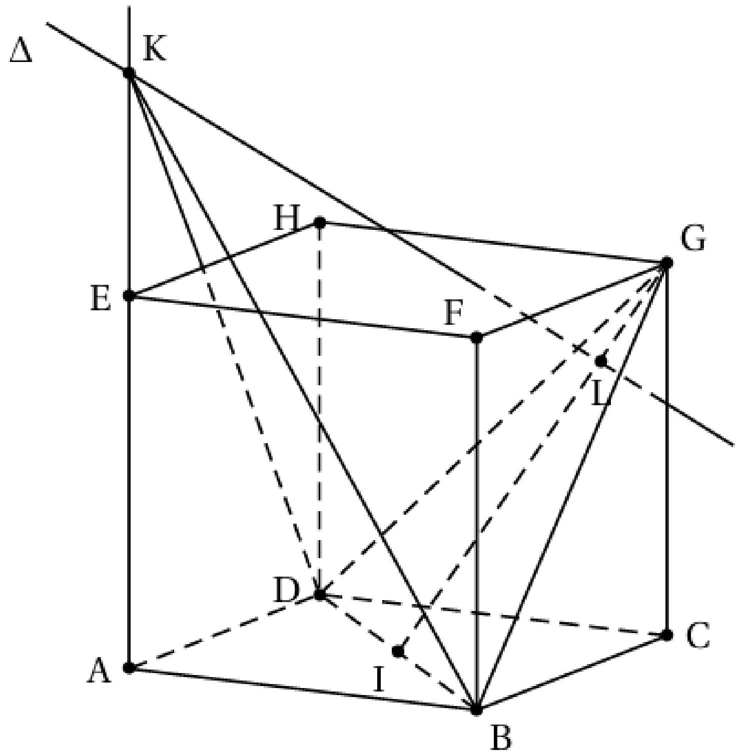
D'autre part, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times cos(\widehat{BAC})$, avec :

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-2)^2+4^2+3^2} = \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2^2+4^2+1^2} = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$

Donc on a l'égalité suivante : $15 = \sqrt{29}\times\sqrt{21}\,cos(\widehat{BAC})$, et par suite : $cos(\widehat{BAC}) = \frac{15}{\sqrt{29}\times\sqrt{21}}$.

A l'aide de la calculatrice réglée en mode degré, (on tape arccos($\frac{15}{\sqrt{29}\times\sqrt{21}}$)), on obtient : $\widehat{BAC} \approx 53°$.

Exercice III



Le point I est le milieu du segment [BD]. On définit le point L tel que $\overrightarrow{IL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{IG}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. **a.** D (0; 1; 0), B (1; 0; 0), I $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$ et G (1; 1; 1)

b. • $\overrightarrow{IL}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_L - x_I\\ y_L - y_I\\ z_L - z_I\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_L - \frac{1}{2}\\ y_L - \frac{1}{2}\\ z_L - 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_L - \frac{1}{2}\\ y_L - \frac{1}{2}\\ z_L\end{pmatrix}$

- $\overrightarrow{\mathrm{IG}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_{\mathrm{G}} - x_{\mathrm{I}} \\ y_{\mathrm{G}} - y_{\mathrm{I}} \\ z_{\mathrm{G}} - z_{\mathrm{I}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{1}{2} \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{\mathrm{IL}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{IG}} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_{\mathrm{L}} - \frac{1}{2} & = & \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \\ y_{\mathrm{L}} - \frac{1}{2} & = & \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \\ z_{\mathrm{L}} & = & \frac{3}{4} \times 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_{\mathrm{L}} & = & \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \\ y_{\mathrm{L}} & = & \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \\ z_{\mathrm{L}} & = & \frac{3}{4} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_{\mathrm{L}} & = & \frac{7}{8} \\ y_{\mathrm{L}} & = & \frac{7}{8} \\ z_{\mathrm{L}} & = & \frac{3}{4} \end{array}\right.$$

2. Soit $\mathscr{P}$ le plan d'équation cartésienne $x + y - z - 1 = 0$.

- $x_{\mathrm{B}} + y_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{B}} - 1 = 1 + 0 - 0 - 1 = 0$ donc $\mathrm{B} \in \mathscr{P}$.
- $x_{\mathrm{D}} + y_{\mathrm{D}} - z_{\mathrm{D}} - 1 = 0 + 1 - 0 - 1 = 0$ donc $\mathrm{D} \in \mathscr{P}$.

- $x_{\mathrm{G}} + y_{\mathrm{G}} - z_{\mathrm{G}} - 1 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$ donc $\mathrm{G} \in \mathscr{P}$.

Donc le plan (BDG) a pour équation cartésienne $x + y - z - 1 = 0$.

3. On considère la droite Δ perpendiculaire au plan (BDG) passant par L.

a. (BDG) a pour équation $x + y - z - 1 = 0$, donc il a pour vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

La droite Δ est perpendiculaire au plan (BDG) donc elle a le vecteur $\overrightarrow{n}$ comme vecteur directeur. Donc la droite Δ est l'ensemble des points $\mathrm{M}\,(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{LM}} = t\,\overrightarrow{n}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{LM}} = t\,\overrightarrow{n} \iff \left\{\begin{array}{lcl} x - \frac{7}{8} & = & t \times 1 \\ y - \frac{7}{8} & = & t \times 1 \\ z - \frac{3}{4} & = & t \times (-1) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{7}{8} + t \\ y & = & \frac{7}{8} + t \\ z & = & \frac{3}{4} - t \end{array}\right. \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

b. Soit K le point de coordonnées $\left(0\,;\,0\,;\,\frac{13}{8}\right)$.

- On regarde si les coordonnées de K vérifient la représentation paramétrique de Δ, autrement dit on cherche s'il existe un réel t tel que ; $\begin{cases} 0 &= \frac{7}{8}+t \\ 0 &= \frac{7}{8}+t \\ \frac{13}{8} &= \frac{3}{4}-t \end{cases}$

  Le réel $t=-\dfrac{7}{8}$ convient donc $K \in \Delta$.

- $\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AK}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{13}{8}\end{pmatrix}$.

  Donc les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires donc $K \in (AE)$.

Les deux droites Δ et (AE) sont donc sécantes en K.

c.
- $\overrightarrow{IL} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{IG}$ donc $L \in (IG)$ donc $L \in (BDG)$.
- La droite Δ est perpendiculaire au plan (BDG).
- $K \in (BDG)$

Donc le point L est le projeté orthogonal du point K sur le plan (BDG).

4. **a.** K a pour coordonnées $\left(0\,;\,0\,;\,\frac{13}{8}\right)$ et L a pour coordonnées $\left(\frac{7}{8}\,;\,\frac{7}{8}\,;\,\frac{3}{4}\right)$. Donc

$$KL^2=\left(\frac{7}{8}-0\right)^2+\left(\frac{7}{8}-0\right)^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{13}{8}\right)^2=\left(\frac{7}{8}\right)^2+\left(\frac{7}{8}\right)^2+\left(-\frac{7}{8}\right)^2=\frac{49}{64}+\frac{49}{64}+\frac{49}{64}=\frac{147}{64}$$

donc $KL=\dfrac{\sqrt{147}}{8}=\dfrac{7\sqrt{3}}{8}$

4.b. Toutes les faces d'un cube sont des carrés identiques d'arête 1 ici.

[DB], [BG] et [GD] sont des diagonales de carrés identiques donc ont la même longueur égale à $\sqrt{2}$.

Donc le triangle DBG est équilatéral.

Cela peut se retrouver à l'aide su théorème de Pythagore, mais c'est de la culture générale que de savoir que les diagonales d'un carré de côté a mesurent $a\sqrt{2}$!

Le point I est le milieu de [BD] donc I est aussi le pied de la hauteur issue de G dans le triangle DBG.

Dans le triangle GIB rectangle en I, on a : $\sin\left(\widehat{IBG}\right)=\dfrac{IG}{BG}$.

BG est la diagonale du carré BCGF de côté 1, donc $BG=\sqrt{2}$. De même $BD=\sqrt{2}$.

On a donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{IG}{BG}$, donc $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{IG}{\sqrt{2}}$ et donc $IG=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Autre possibilité : Calculer IG à l'aide du théorème de Pythagore appliqué au triangle IBG rectangle en I, avec BG = $\sqrt{2}$ et BI = $\frac{\sqrt{2}}{2}$: BG² = BI² + IG², donc IG² = BG² – BI² = $\sqrt{2}^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Donc IG = $\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

L'aire du triangle BDG vaut : $\dfrac{\mathrm{BD}\times\mathrm{IG}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

c. Le tétraèdre KDBG a pour base le triangle BDG et pour hauteur KL, donc son volume vaut : $\dfrac{1}{3}\times\text{aire(BDG)}\times\mathrm{KL} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{7\sqrt{3}}{8} = \dfrac{7}{16}$

5. On désigne par a un réel appartenant à l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ et on note K_a le point de coordonnées $(0\,;\,0\,;\,a)$.

a. On exprime le volume $\mathcal{V}_a$ de la pyramide ABCDK_a en fonction de a.

- La base de la pyramide est le carré ABCD d'aire 1.
- Le point K_a a pour coordonnées $(0\,;\,0\,;\,a)$ donc il appartient à la droite (AE) et donc AK_a est la hauteur de la pyramide ABCDK_a.
- De façon évidente, $\mathrm{AK}_a = a$.

Donc $\mathcal{V}_a = \dfrac{1}{3}\times a\times 1 = \dfrac{a}{3}$.

b. On note Δ_a la droite de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t' \\ y &=& t' \\ z &=& -t'+a \end{array}\right.$ où $t'\in\mathbb{R}$.

On appelle L_a le point d'intersection de la droite Δ_a avec le plan (BDG).

Les coordonnées de L_a vérifient le système $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& t' \\ y &=& t' \\ z &=& -t'+a \\ x+y-z-1 &=& 0 \end{array}\right.$

On a donc $t'+t'-(-t'+a)-1=0$ soit $3t'=a+1$ donc $t'=\dfrac{a+1}{3}$.

$x=t'=\dfrac{a+1}{3}$; $y=t'=\dfrac{a+1}{3}$ et $z=-t'+a=-\dfrac{a+1}{3}+a=\dfrac{-a-1+3a}{3}=\dfrac{2a-1}{3}$

Donc les coordonnées du point L_a sont $\left(\dfrac{a+1}{3}\,;\,\dfrac{a+1}{3}\,;\,\dfrac{2a-1}{3}\right)$.

c. On cherche le volume du tétraèdre GDBK_a.

- $K_aL_a{}^2 = \left(\dfrac{a+1}{3} - 0\right)^2 + \left(\dfrac{a+1}{3} - 0\right)^2 + \left(\dfrac{2a-1}{3} - a\right)^2$
$$= \left(\dfrac{a+1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{a+1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{-a-1}{3}\right)^2 = 3 \times \dfrac{(a+1)^2}{9} = \dfrac{(a+1)^2}{3}$$
Donc $K_aL_a = \dfrac{a+1}{\sqrt{3}}$.
- Le volume du tétraèdre GDBK_a est :
$\dfrac{1}{3} \times K_aL_a \times \text{aire(GBD)} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{a+1}{\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a+1}{6}$

Le tétraèdre GDBK_a et la pyramide ABCDK_a sont de même volume si et seulement si $\dfrac{a+1}{6} = \dfrac{a}{3}$, soit $\dfrac{a+1}{6} = \dfrac{2a}{3}$, soit $a+1 = 2a$, et donc si $a = 1$.