Exercice I

a) $f(x) = -2x^2 + 1 + e^{2x+4}$

$\boxed{f'(x)} = -2\times 2x + 0 + 2e^{2x+4} = \boxed{-4x + 2e^{2x+4}}$

Rappel : $x \mapsto e^{ax+b}$ a pour dérivée : $x \mapsto a e^{ax+b}$

b) $g(x) = 4x^3 + x + 7$

$g'(x) = 4\times 3x^2 + 1$

$\boxed{g'(x) = 12x^2 + 1}$

$h(x) = (4x^3 + x + 7)^5 = (g(x))^5$

$h'(x) = 5g'(x)(g(x))^4$

$\boxed{h'(x) = 5(12x^2+1)(4x^3+x+7)^4}$.

c) $i(x) = \dfrac{e^x}{x^2} = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec : $\begin{cases} u(x) = e^x \\ u'(x) = e^x \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = x^2 \\ v'(x) = 2x \end{cases}$.

$i'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \dfrac{e^x \times x^2 - e^x \times 2x}{(x^2)^2} = \dfrac{e^x(x^2 - 2x)}{x^4} = \dfrac{e^x \times x(x-2)}{x^4}$

$\boxed{i'(x) = \dfrac{e^x(x-2)}{x^3}}$ car $\dfrac{x}{x^4} = \dfrac{x^1}{x^4} = x^{1-4} = x^{-3} = \dfrac{1}{x^3}$ ou plus simplement : $\dfrac{x}{x^4} = \dfrac{\cancel{x}\times 1}{\cancel{x}\times x^3}$

$\dfrac{x}{x^4} = \dfrac{1}{x^3}$

d) $j(x) = \dfrac{3}{10+e^{-x}} = 3 \times \dfrac{1}{v(x)}$ où $\begin{cases} v(x) = 10 + e^{-x} \\ v'(x) = 0 - e^{-x} = -e^{-x} \end{cases}$.

$\boxed{j'(x)} = 3 \times \left(\dfrac{-v'(x)}{v^2(x)}\right) = \boxed{\dfrac{3e^{-x}}{(10+e^{-x})^2}}$.

e) $k(x) = \sqrt{2x^4 + e^{-x^2}} = \sqrt{u(x)}$ où : $\begin{cases} u(x) = 2x^4 + e^{-x^2} \\ u'(x) = 2\times 4x^3 - 2xe^{-x^2} = 8x^3 - 2xe^{-x^2} \end{cases}$

(!) dérivée d'une composée

$\boxed{k'(x)} = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{8x^3 - 2xe^{-x^2}}{2\sqrt{2x^4+e^{-x^2}}} = \dfrac{2x(4x^2 - e^{-x^2})}{2\sqrt{2x^4+e^{-x^2}}} = \boxed{\dfrac{x(4x^2 - e^{-x^2})}{\sqrt{2x^4+e^{-x^2}}}}$

Exercice II

1) $f(x) = (x+1)e^{-2x} = u(x)v(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = x+1 \\ u'(x) = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = e^{-2x} \\ v'(x) = -2e^{-2x} \end{cases}$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car produit et composée de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = e^{-2x} + (x+1)\times(-2e^{-2x}) = e^{-2x}(1-2(x+1))$

$f'(x) = e^{-2x}(1-2x-2)$

$\boxed{f'(x) = (-2x-1)e^{-2x}}$

2) Etudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$: Pour tout réel x, $e^{-2x} > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $-2x-1$.

Ainsi, $f'(x) \geq 0$ équivaut à : $-2x-1 \geq 0$, c'est à dire $-2x \geq 1$ et donc à $x \leq \frac{1}{-2}$

$f'(x) \geq 0 \iff x \leq -\frac{1}{2}$

⚠ On divise par -2 (et $-2<0$) les deux membres de l'inégalité, donc on change son sens.

Par suite on a :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{e}{2}$	$\searrow$	

$f(-\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}+1)e^{-2\times(-\frac{1}{2})} = \frac{e}{2}$

3) Autant que de solution de l'équation : $f'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Or $f'(x) = 0$ équivaut à $x = -\frac{1}{2}$ (d'après le tableau précédent).

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ admet une seule tangente parallèle à l'axe des abscisses (en son point d'abscisse $-\frac{1}{2}$)

4) Notons T_A la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $A(0;f(0))$ avec $f(0) = (0+1)e^{-2\times 0} = 1\times e^0 = 1$.

T_A a pour équation réduite : $y = f'(0)\times(x-0) + f(0)$ avec : $f'(0) = (-2\times 0 - 1)e^{-2\times 0} = -1$

$\boxed{y = -x+1}$

5) $f''(x) = 4xe^{-2x}$.

Etudions le signe de $f''(x)$ pour avoir la convexité de f :

Pour tout réel x, $e^{-2x} > 0$, donc $f''(x)$ a le même signe que $4x$ sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $f''(x) \geq 0 \iff 4x \geq 0 \iff x \geq \frac{0}{4} \iff x \geq 0$.

f est donc convexe sur $[0;+\infty[$ et concave sur $]-\infty;0]$. $\mathcal{C}_f$ a un seul point d'inflexion

Exercice III

Partie A

1a) $\boxed{f(0)=2}$

1b) $f'(0)=$ coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $\underbrace{\text{son point d'abscisse } 0}_{N}$.

$f'(0)=$ coefficient directeur de T. OR T passe par P, donc $T=(NP)$.

$\boxed{f'(0)}=\frac{-2}{2}=\boxed{-1}$ (Méthode graphique de l'escalier) ou sinon : $f'(0)=\frac{y_P-y_N}{x_P-x_N}$

$f'(0)=\frac{0-2}{2-0}=\frac{-2}{2}$

$f'(0)=-1$.

2) $f(x)=0$* a pour unique solution réelle : $x=-2$.

$\boxed{\mathcal{S}=\{-2\}}$.

* les solutions de cette équation sont les ABSCISSES des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses (x).

3) Non, manifestement, f change de concavité en le point N : elle semble être concave sur $]-\infty\,;0]$ et convexe sur $[0\,;+\infty[$, donc non convexe sur $\mathbb{R}$.

4) On cherche ici la courbe d'une fonction (notée g) telle que : $g'=f$

Grâce à la courbe de f, on lit graphiquement le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$ (qui est donc le signe de $g'(x)$!).

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$g'(x)=f(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗	

Parmi les trois courbes données, seule la courbe 2 correspond au tableau de variation précédent.

$\boxed{\mathscr{C}_f \text{ est donc la courbe représentative de la fonction dérivée associée à la courbe 2}}$

Partie B

$f(x)=(ax+b)e^{\lambda x}$.

1) $f(0)=2$ (partie A), donc $(a\times 0+b)e^{\lambda\times 0}=2$, donc $be^0=2$, donc

$\boxed{b=2}$ car $e^0=1$.

2) $M(-2;0) \in \mathcal{C}_f$, donc $f(-2)=0$, donc $(-2a+b)e^{-2\lambda}=0$ car $f(x)=(ax+b)e^{\lambda x}$

Or $e^{-2\lambda} \neq 0$, donc $\boxed{-2a+b=0}$.

D'après q.1, $b=2$, donc $-2a+2=0$, donc $2a=2$ et $\boxed{a} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$.

3) On a : $a=1$; $b=2$, donc $f(x) = (2x+1)e^{\lambda x}$.

Reste à trouver λ : On va exploiter (partie A) le fait que $f'(0)=-1$.

Or $f(x)=(2x+1)e^{\lambda x}$

alors $f'(x) = 2e^{\lambda x} + (2x+1)\times \lambda e^{\lambda x}$ dérivée d'un produit de fonctions.

$f'(x) = e^{\lambda x}\left(2+\lambda(2x+1)\right) = e^{\lambda x}(2\lambda x+\lambda+2)$.

Ainsi, $f'(0)=-1$ équivaut à : $\underbrace{e^{\lambda\times 0}}_{=1}(2\lambda\times 0+\lambda+2)=0$

$\lambda+2=0$

$\boxed{\lambda=-2}$

Ainsi, $\boxed{f(x)=(2x+1)e^{-2x}}$

Exercice IV

1) Réponse $\boxed{B}$: $\left[\frac{2}{3} ; +\infty\right[$ (En effet, $h''(x) = -6x+4$, et $h''(x) \leq 0 \iff x \geq \frac{2}{3}$).

2) Réponse $\boxed{A}$: $\dfrac{x^3e^x-2}{x^3}$ (En effet : $f'(x) = \frac{1}{x^2}+e^x$ et $f''(x) = \frac{-2x}{x^4}+e^x$

$f''(x) = \frac{-2}{x^3}+e^x$

$f''(x) = \dfrac{-2+x^3e^x}{x^3}$.

3) Réponse $\boxed{C}$: g est convexe sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $a>0$.

(En effet : $f(x)=ax^2+bx+c$

$f'(x)=2ax+b$

$f''(x)=2a$, donc $\forall x\in\mathbb{R}$, $f''(x)\geq 0$ équivaut à $2a\geq 0$ donc à $a \geq 0$.

Exercice V

$g(x)=xe^{-x}$.

$g'(x) = e^{-x}+x\times(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)$

$g''(x) = -e^{-x}(1-x)+e^{-x}\times(-1) = -e^{-x}(1-x+1) = -e^{-x}(-x+2) = e^{-x}(x-2)$

Or, pour tout réel x, $e^{-x}>0$, donc $g''(x)$ a le même signe que $x-2$.

Cette quantité s'annule en $x=2$ et change de signe :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

Ainsi $\mathcal{C}_g$ admet un unique point d'inflexion ayant pour abscisse 2.

$g(2) = 2e^{-2} = \frac{2}{e^2}$, donc $A\left(2 ; \frac{2}{e^2}\right)$ est l'unique point d'inflexion de $\mathcal{C}_g$.

L'affirmation $\boxed{1}$ est vraie.

Sur $[-1;3]$, $\mathcal{C}_h$ est située AU-DESSUS de l'axe des abscisses, donc $h'(x) \geqslant 0$ sur cet intervalle : l'affirmation $\boxed{2}$ est VRAIE.

Sur $[-3;-1{,}57]$ qui est contenu dans $[-3;-1]$, $\mathcal{C}_h$ est sous l'axe des abscisses donc $h'(x) \leqslant 0$ sur cet intervalle, donc h décroît sur $[-3;-1{,}57]$: l'affirmation 3 est FAUSSE.

Notons T la tangente à $\mathcal{C}_h$ en son point d'abscisse -2 :

T a pour équation réduite : $y = h'(-2)(x-(-2)) + h(-2)$.

Or $h'(-2) = -3$ (lu graphiquement) et $A(-2;7) \in \mathcal{C}_h$, donc $h(-2) = 7$.

donc $y = -3(x+2)+7 = -3x-6+7$: $y = -3x+1$ est l'équation réduite de T

Or $-3x_B+1 = -3\times 0+1 = 1 = y_B$, donc $B(0;1) \in T$: l'affirmation $\boxed{4}$ est VRAIE.

Exercice VI

1. La fonction dont la courbe représentative est la courbe $\mathscr{C}_2$ est strictement positive sur $\mathbb{R}$, si c'était la dérivée d'une fonction, cette fonction serait strictement croissante or aucune des deux autres fonctions n'est strictement croissante. Cette fonction ne peut pas être la dérivée d'une des deux autres, c'est donc la fonction f.

   f étant strictement croissante, sa dérivée est une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est donc la fonction dont la courbe représentative est la courbe $\mathscr{C}_3$

   Et par élimination, $\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction f'' (On vérifie que f' est croissante sur $]-\infty;4]$ et décroissante sur $[4;+\infty[$ ce qui coïncide avec le signe de $f''(x)$ qui est positive sur $]-\infty;4]$ et négative sur $[4;+\infty[$.

   $\mathscr{C}_1$ est la courbe représentative de la fonction f''.

   $\mathscr{C}_2$ est la courbe représentative de la fonction f.

   $\mathscr{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction f'.

2. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_2$, courbe représentative de la fonction f, au point d'abscisse 4 est égal à $f'(4)$ soit 3 par lecture graphique.

3. Les abscisses des points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_1$ sont environ 3 , 4 et 5.

Remarque : si vous n'aviez pas trouvé la réponse à la question 1, on pouvait aussi pour la question 2) procéder comme suit : tracer la tangente à C_2 au point d'abscisse 4, puis avec la méthode de l'escalier, on trouve que $f'(4) = 3$ car la tangente passe par les points de coordonnées (3 ; −1) et (5 ; 5).