

Exercice I

1a) $A(1; 2; 3) \quad B(-1; 4; 5)$

$\vec{AB} \begin{pmatrix} -1-1=-2 \\ 4-2=2 \\ 5-3=2 \end{pmatrix}$ dirige (AB), donc $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige également (AB) car $\vec{AB} = 2\vec{u}$.

Rq : essayez, si possible, de prendre un vecteur directeur dont les coordonnées sont "les plus petites" possibles.

Un R-P de (AB) dirigé par $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et passant par $A(1; 2; 3)$ est donc :

$$\begin{cases} x = 1 + (-1)t \\ y = 2 + 1t \\ z = 3 + 1t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

En simplifiant, un R-P de (AB) est donc :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

1b) Soit (Δ) la droite passant par $C(0; 7; 11)$ et parallèle à (AB) : Vu que $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige (AB) et que $(AB) \parallel (\Delta)$, \vec{u} dirige également (Δ) , de sorte que, un R-P de la droite (Δ)

est donc :

$$\begin{cases} x = 0 - t' = -t' \\ y = 0 + t' = t' \\ z = 11 + t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

② $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 0-1=-1 \\ 0-2=-2 \\ 11-3=8 \end{pmatrix}$. Or $\frac{-2}{-1} = 2$ et $\frac{2}{-2} = -1$. Vu que $2 \neq -1$ il en résulte que \vec{AB} et \vec{AC} n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles, et à ce titre, \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés et forment donc un unique plan, le plan (ABC).

③ $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ dirige (AB) et $\vec{CD} \begin{pmatrix} 3-0=3 \\ 0-0=0 \\ 1-11=-10 \end{pmatrix}$ dirige (CD).

\vec{AB} et \vec{CD} sont non colinéaires car $\frac{3}{-2} \neq \frac{0}{2}$, donc (AB) et (CD) ne sont ni parallèles, ni confondues.

Écrivons l'intersection de (AB) et (CD), en commençant par donner un R-P de (CD) :

$\vec{CD} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}$ dirige (CD) et (CD) passe par $C(0; 7; 11)$, donc un R-P de (CD) est :

$$\begin{cases} x = 0 + 3\lambda = 3\lambda \\ y = 0 + 0\lambda = 0 \\ z = 11 - 10\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

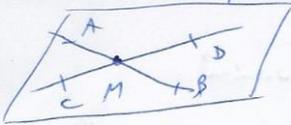
$M(x; y; z) \in (AB) \cap (CD) \iff \exists t \in \mathbb{R}, \exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} x = 1 - t = 3\lambda \\ y = 2 + t = 0 \\ z = 3 + t = 11 - 10\lambda \end{cases} \begin{cases} t = -2 \\ 1 - (-2) = 3\lambda \\ 3 - 2 = 11 - 10\lambda \end{cases}$$

Par suite, $x = 1 - t = 1 - (-2) = 3$
 $y = 0$
 $z = 3 + t = 3 + (-2) = 1$, donc $M(3; 0; 1)$ est le point d'intersection des droites

(AB) et (CD) qui sont donc sécantes en ce point M.

On en déduit que les points A, B, C et D sont COPLANAIRES car deux droites réelles sont coplanaires.



④ ACBE est un p.p.m. $\Leftrightarrow \vec{AC} = \vec{EB}$

Soit $E(x; y; z)$: $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\vec{EB} = \begin{pmatrix} -1-x \\ 4-y \\ 5-z \end{pmatrix}$

$$\left. \vec{AC} = \vec{EB} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = -1-x \\ -2 = 4-y \\ 8 = 5-z \end{cases} \right\} \begin{array}{l} \text{2 vecteurs} \\ \text{sont égaux} \\ \text{ssi ils ont les mêmes} \\ \text{coordonnées.} \end{array}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4+2=6 \\ z=5-8=-3 \end{cases}$ donc $E(0; 6; -3)$ et ACBE est un p.p.m.

Soit K le centre de ACBE. K est le point d'intersection des diagonales [AB] et [CE] de ce p.p.m. et un p.p.m. a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, donc $K = \text{Milieu de } [AB]$.

Par suite, $K\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$, $K\left(\frac{1+(-1)}{2}; \frac{2+4}{2}; \frac{3+5}{2}\right)$, $\boxed{K(0; 3; 4)}$

⑤ $F(-4; 4; 15)$ et $A(1; 2; 3)$, donc $\vec{AF} = \begin{pmatrix} -4-1=-5 \\ 4-2=2 \\ 15-3=12 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ (déjà vus, précédents).

donc, $a\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2a \\ 2a \\ 2a \end{pmatrix}$ et $b\vec{AC} = \begin{pmatrix} -b \\ -2b \\ 8b \end{pmatrix}$, donc $a\vec{AB} + b\vec{AC} = \begin{pmatrix} -2a-b \\ 2a-2b \\ 2a+8b \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\vec{AF} = a\vec{AB} + b\vec{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 = -2a-b \\ 2 = 2a-2b \\ 12 = 2a+8b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a+5 \\ 2 = 2a-2(-2a+5) = 6a-10 \\ 12 = 2a+8(-2a+5) = -14a+40 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b = -2a+5 \\ 6a = 12 \\ 14a = 20-12 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 2 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{système compatible!} \\ b = -2 \times 2 + 5 = 1 \end{array} \right.$

donc $\boxed{\vec{AF} = 2\vec{AB} + \vec{AC}}$ Vu que \vec{AB} et \vec{AC} non colinéaires (cf. ②), $(\vec{AB}; \vec{AC})$ est une base du pla (ABC). Comme \vec{AF} est une combinaison linéaire des vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} , il en résulte que les quatre points A, B, C et F sont coplanaires (i.e.) $\boxed{F \in (ABC)}$.

⑥ Par simple lecture sur la R-P de \mathcal{D} on peut dire que: \mathcal{D} passe par $P(2; 3; 1)$ et \mathcal{D} est dirigée par $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Autre caractérisation: \mathcal{D} est la droite passant par $P(2; 3; 1)$ et $Z(5; 0; 7)$ $\left\{ \begin{array}{l} \vec{w} \text{ de la R-P.} \\ \lambda = 3 \end{array} \right.$

⑦ On cherche s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que: $\begin{cases} 0,4 = 2 + \lambda \\ 2,5 = 3 - \lambda \\ 1 = 1 + 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0,4 - 2 = -1,6 \\ \lambda = 3 - 2,5 = 0,5 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{système incompatible!} \end{array} \right.$

donc $\boxed{W(0,4; 2,5; 1) \notin (\mathcal{D})}$

de même, existe-t-il $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que: $\begin{cases} -9 = 2 + \lambda \\ 14 = 3 - \lambda \\ -21 = 1 + 2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -9 - 2 = -11 \\ \lambda = 3 - 14 = -11 \\ \lambda = \frac{-21-1}{2} = -11 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{système compatible!} \\ \boxed{L(-9; 14; -21) \in \mathcal{D}} \end{array} \right.$

Exercice II

53 a) $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$ définit le plan (ABC) . Or K est un point de (CD) , donc est dans le plan (ABC) : il existe donc deux réels x, y tels que $\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CK} - \overrightarrow{CA} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AK} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

donc $x = \frac{1}{5}$ et $y = 1$.

100 1. a) $\overrightarrow{AB}\left(-3; -\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}\right)$ et $\overrightarrow{AC}\left(1; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C définissent un plan.

b) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan.

2. $\overrightarrow{EF}\left(-1; -\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

On remarque que $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AC} et \overrightarrow{EF} sont coplanaires. Par conséquent la droite (EF) est parallèle au plan (ABC) .

49 a) $\vec{u}(-1; 2; 1)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{u}'(1; -1; -2)$ est un vecteur directeur de d' .

b) Les coordonnées des vecteurs \vec{u} et \vec{u}' ne sont pas proportionnelles donc \vec{u} et \vec{u}' ne sont pas colinéaires. On en déduit que les droites d et d' ne sont pas parallèles.

Les droites d et d' peuvent être sécantes ou non coplanaires.

c) On résout le système :

$$\begin{cases} 1 - t = 2 + t' \\ 2 + 2t = -2 - t' \text{ qui est équivalent à} \\ -1 + t = -2t' \end{cases}$$

$$\begin{cases} t + t' = -1 \\ 2t + t' = -4 \\ t + 2t' = 1 \end{cases} \text{ ainsi } \begin{cases} t' = 2 \\ t = -3 \end{cases}$$

On remplace t dans la représentation paramétrique de d et on obtient :

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -4 \\ z = -4 \end{cases}$$

Le point d'intersection de d et d' a pour coordonnées $(4; -4; -4)$.

53 $\vec{u}(3;1;-1)$ est un vecteur directeur de d .

$\vec{u}'(1;1;-1)$ est un vecteur directeur de d' .

Or \vec{u} et \vec{u}' ne sont pas colinéaires donc d et d' ne sont pas parallèles.

On résout le système :

$$\begin{cases} 3t = 1 + t' \\ -1 + t = t' \\ 2 - t = 3 - t' \end{cases} \quad \text{qui est équivalent à}$$

$$\begin{cases} 3t - t' = 1 \\ t - t' = 1 \\ t - t' = -1 \end{cases}$$

Ce qui est impossible.

Ainsi, d et d' ne sont ni parallèles, ni sécantes donc elles sont non coplanaires.

Exercice III

- 1) Réponse **C**.
- 2) Réponse **D**.
- 3) Réponse **A**.
- 4) Réponse **B**.

Justifications :

1) Méthode système D : Les coordonnées de A et B doivent vérifier les équations de la R.P solution :

Ce n'est pas la réponse A, A est le point de paramètre $t=0$ de cette R.P, par contre pour B(0; 2; 5) :

$$\begin{cases} 0 = 2 + 2t \\ 2 = -2 + 4t \\ 5 = 7 - 2t \end{cases} \text{ conduit à : } t = -1 \text{ et } z = -6, \text{ donc système}$$

incompatible : B n'appartient pas à cette droite.

En procédant de façon similaire, A et B appartiennent à la R.P de la réponse **C**.

Méthode bis $\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ dirige (AB), donc $\vec{u} = \frac{1}{2} \vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ dirige (AB), donc

une R.P de (AB) qui passe par B(0; 2; 5) est : $\begin{cases} x = -t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 5 + t' \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$.

Posons $t = 1 + t'$ c'est à dire $t' = t - 1$:

Une R.P de (AB) est : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 5 + t - 1 = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} = \text{réponse } \mathbf{C}$.

Méthode tern (Sans doute celle que vous cherchez ?)

La méthode bis nécessite un peu d'expérience - Il est normal de ne pas y penser

On procède à partir de la R.P (trouvée de (AB)) à la méthode précédente :

(AB) admet pour R.P : $\begin{cases} x = -t' \\ y = 2 + 2t' \\ z = 5 + t' \end{cases}$ où $t' \in \mathbb{R}$.

Les R.P données en réponses B, C, D ont des vecteurs directeurs colinéaires ou égale à $\vec{u} = \frac{1}{2} \vec{AB}$ et celle de la réponse A n'est pas colinéaire à \vec{u} : on exclut A.

Le plus simple ensuite est de regarder si B(0; 2; 5) appartient ou pas aux droites dont une R.P est donnée en réponse B, C, D.

Cela rejoint la méthode système D ! Par exemple (calcul mental), réponse D est à

exclure car sa direction, au vu de son abscisse, B serait le point de paramètre $t=0$ de la

réponse D, sauf que si $t=0$: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$. Or $z_B = 5$ et $5 \neq 4$.

aucune réponse **D** exclue -

On arrive à penser à : réponse **C** exacte -

$$\textcircled{2} \vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\frac{x_{AB}}{x_{AC}} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$ et $\frac{y_{AB}}{y_{AC}} = \frac{4}{2} = 2$. Or $\frac{2}{3} \neq 2$, donc \vec{AB} et \vec{AC} n'ont pas les coordonnées proportionnelles, donc \vec{AB} et \vec{AC} ne sont pas colinéaires et A, B, C non alignés -

$\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{BC} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$, donc $\vec{AB} \neq \vec{BC}$, donc ABCD n'est pas un pgon.

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AD} \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} : \frac{x_{AD}}{x_{AB}} = \frac{-4}{-2} = 2 \text{ et } \frac{y_{AD}}{y_{AB}} = \frac{8}{4} = 2$$

$z_{AD} = -2 \neq 2$, donc \vec{AB} et \vec{AD} non colinéaires, donc A, B, D ne sont pas alignés : ils forment donc un unique plan : Réponse \boxed{D}

$$3) K \text{ est le milieu de } [AB], \text{ donc } K \left(\frac{2+0}{2}; \frac{-2+2}{2}; \frac{3+5}{2} \right), K(1; 0; 4)$$

(d) est dirigé par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc le R-P de d qui passe par K est :

$$\begin{cases} x = 1 + t' \\ y = t' \\ z = 4 + t' \end{cases} \text{ où } t' \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Or le R-P de } \Delta \text{ est : } \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + 3t \\ z = 4 + t \end{cases}, \text{ donc } (\Delta) \text{ est dirigé par } \vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Clair que \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires (en les déjant), donc (d) et (Δ) ne sont pas parallèles.

Étudions leur intersection: $M(x, y, z) \in (d) \cap (\Delta)$ équivaut à chercher s'il existe des

$$\text{réels } t \text{ et } t' \text{ tels que : } \begin{cases} x = 1 - 2t = 1 + t' \\ y = 3 + 3t = t' \\ z = 4 + t = 4 + t' \end{cases} \text{ donc : } \begin{cases} t' = -2t \\ t' = 3 + 3t \\ t = t' \end{cases}$$

$$\text{Ce qui conduit à : } \begin{cases} t' = t' \\ t = -2t \\ t = 3 + 3t \end{cases} \text{ donc : } \begin{cases} t' = t \\ 3t = 0 \\ 2t = -3 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} t' = t \\ t = 0 \\ t = -\frac{3}{2} \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Système} \\ \text{incompatible} \\ 0 \neq -\frac{3}{2} \end{array} \right\}$$

Ainsi (d) et (Δ) n'ont aucun point en commun, et comme (d) et (Δ) ne sont pas parallèles, il en résulte que ces deux droites sont non coplanaires : réponse \boxed{A} .

$$4) \text{ l'ensemble } (A) \text{ est : } \begin{cases} x=1-2t \\ y=3+3t \\ z=4+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Pour qui sait compter mentalement, $F(7, -6, 1)$ est le point de paramètre $t = -3$ de (A) .
 donc réponse B.

Si on peut éliminer: $E(-3, 9, 9) \in (A)$ équivaut à: $\exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} -3=1-2t \\ 9=3+3t \\ 9=4+t \end{cases}$, donc $\begin{cases} t=2 \\ t=2 \\ t=5 \end{cases}$
 donc $\square \notin (A)$ ---
!!

Exercice IV

A) $g(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - x \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x(4 - \ln(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ 4 - \ln(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ \ln(x) = 4 \end{cases}$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ e^{\ln(x)} = e^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \text{ou} \\ x = e^4 \end{cases}$

Or $x \in]0; +\infty[$, donc $x \neq 0$, et par suite, $\mathcal{J} = \{e^4\}$.

② $g(x) = x(4 - \ln(x))$ avec $x > 0$.

Faisons un tableau de signes: $4 - \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq \ln(x) \Leftrightarrow e^4 \geq e^{\ln(x)} \Leftrightarrow x \leq e^4$ (exp. str. croissante de \mathbb{R})

0/00 :

	$x 0$		e^4		$+\infty$
x	o	+	+	+	
$4 - \ln(x)$		+	o	-	
$g(x) = x(4 - \ln(x))$		+	o	-	

③ Grâce au tableau de signe précédent, g n'est pas de signe constant sur $]0; +\infty[$: la conjecture:
 x) " g est positive" est donc fautive!
 ($g(x) \leq 0$ sur $[e^4; +\infty[$).

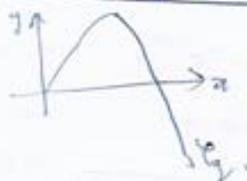
xx) On a : $1 < e^4$ et $g(1) = 4 \times 1 - 1 \times \ln(1) = 4$
 $g(e^4) = 0$ (y.2).

donc $g(1) > g(e^4)$.

↳ bien maintenant $g(1) < g(e^4)$!

Par suite, g ne peut pas être strictement croissante sur $]0, +\infty[$: la seule conjecture est encore fautive.

Rq : l'étève 4.0 aura bien g avec une autre fonction :



Partie B

1a) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$

Or, pour $x > 0$, $x \ln(x) = x \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{x}}\right) = -x \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$.

Soit $X = \frac{1}{x}$: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$, donc par limite de composée : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0$

donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$.

1b) $g(x) = 4x - x \ln(x)$.

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} 4x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$, donc par limite de somme, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

1c) $g(x) = 4x - x \ln(x) = x(4 - \ln(x))$. (on a une F.I en $+\infty$ si on ne factorise pas).

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - \ln(x)) = -\infty$

donc par limite de produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

2a) $g(x) = x(4 - \ln(x)) = u(x)v(x)$ avec : $\begin{cases} u(x) = x \\ u'(x) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} v(x) = 4 - \ln(x) \\ v'(x) = 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} \end{cases}$

BONUS

$$a) \log_2(3x) + \log_4(x^2) = 2 \text{ équivaut à : } \begin{cases} x > 0 \\ \frac{\ln(3x)}{\ln(2)} + \frac{\ln(x^2)}{\ln(4)} = 2 \end{cases}$$

$$\text{Or } \ln(4) = \ln(2^2) = 2\ln(2), \text{ donc : } \begin{cases} x > 0 \\ \frac{\ln(3x)}{\ln(2)} + \frac{\ln(x^2)}{2\ln(2)} = 2 \end{cases}$$

$$\text{donc : } \begin{cases} x > 0 \\ \frac{2\ln(3x)}{2\ln(2)} + \frac{\ln(x^2)}{2\ln(2)} = 2, \text{ donc } \end{cases} \begin{cases} x > 0 \\ 2\ln(3x) + \ln(x^2) = 4\ln(2) \end{cases}$$

$$\text{donc : } \begin{cases} x > 0 \\ 2(\ln(3) + \ln(x)) + 2\ln(x) = 4\ln(2) \end{cases} \quad \text{donc } \begin{cases} x > 0 \\ 4\ln(x) + 2\ln(3) = 4\ln(2) \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} x > 0 \\ 4\ln(x) = 4\ln(2) - 2\ln(3) \end{cases} \quad \text{donc } \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) = \frac{4\ln(2) - 2\ln(3)}{4} = \ln(2) - \frac{1}{2}\ln(3) = \ln(2) - \ln(\sqrt{3}) \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) = \ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \end{cases} \quad \text{donc } x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \mathcal{J} = \left\{ \frac{2\sqrt{3}}{3} \right\}.$$

$$b) \log_2(\sqrt{8\sqrt{4\sqrt{2}}}) = \frac{1}{2} \log_2(8\sqrt{4\sqrt{2}}) = \frac{1}{2} \log_2(8) + \frac{1}{2} \log_2(\sqrt{4\sqrt{2}})$$
$$\log_2(\sqrt{8\sqrt{4\sqrt{2}}}) = \frac{1}{2} \log_2(2^3) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \log_2(4\sqrt{2}) = \frac{3}{2} \log_2(2) + \frac{1}{4} \log_2(4\sqrt{2})$$

$$\log_2(\sqrt{8\sqrt{4\sqrt{2}}}) = 1 + \frac{1}{4} \log_2(4) + \frac{1}{4} \log_2(\sqrt{2}) = 1 + \frac{1}{4} \times \log_2(2^2) + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \log_2(2)$$

$$\log_2(\sqrt{8\sqrt{4\sqrt{2}}}) = 1 + \frac{1}{4} \times 2 \log_2(2) + \frac{1}{8} = 1 + \frac{2}{4} + \frac{1}{8} = \frac{8}{8} + \frac{4}{8} + \frac{1}{8} = \frac{13}{8}$$

c)

Avec la calculette : $x = \ln \pi \approx 1,14$ $y = \log_5 2 \approx 0,43$ et $z = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,60$.

Sans calculette : $\pi > e$ donc $\ln \pi > 1$; $\log_5 2 = \frac{\ln 2}{\ln 5}$ et, comme $\frac{\ln 2}{\ln 4} = \frac{1}{2}$, $\log_5 2 < \frac{1}{2}$; de l'inégalité $e < 3$ on tire $z = \frac{1}{\sqrt{e}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2}$ et l'on a évidemment $z < 1$. D'où $y < z < x$.