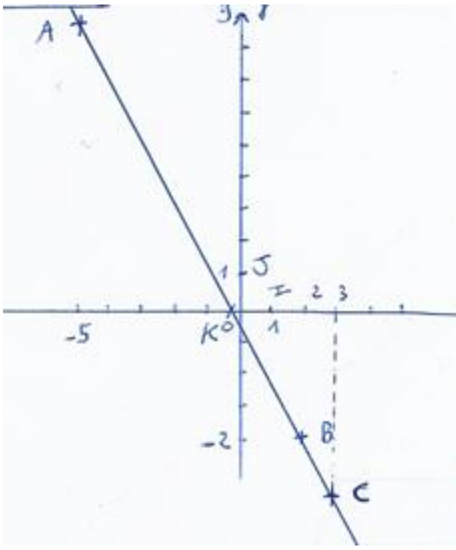
Exercice I



A, B, C sont alignés équivaut à $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires ou encore à $\det(\vec{AB};\vec{AC}) = 0$.

Or, $\vec{AB}\begin{pmatrix}7\\-13\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}x+5\\-6\end{pmatrix}$

$\det(\vec{AB};\vec{AC}) = \begin{vmatrix}7 & x+5\\-13 & -6\end{vmatrix} = 7\times \ - (-13)\times(x+5)$

$\det(\vec{AB};\vec{AC}) = -42 + 13(x+5) = -42 + 13x + 65$

$\det(\vec{AB};\vec{AC}) = 13x+23$

$\det(\vec{AB};\vec{AC}) = 0 \iff 13x+23=0 \iff 13x = -23 \iff x = -\frac{23}{13}$. $\mathcal{S} = \left\{-\frac{23}{13}\right\}$.

donc $\boxed{A, B, C \text{ alignés si et seulement si } C\left(-\frac{23}{13} ; 3\right)}$

② K appartient à l'axe des abscisses, donc $K(x_K ; 0)$.

$K\in(AB) \iff K, A, B$ sont alignés $\iff \vec{AK}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires $\iff \det(\vec{AK};\vec{AB}) = 0$

Or $\vec{AK}\begin{pmatrix}x_K+5\\-9\end{pmatrix}$ et $\vec{AB}\begin{pmatrix}7\\-13\end{pmatrix}$ (cf q1). $\det(\vec{AK};\vec{AB}) = \begin{vmatrix}x_K+5 & 7\\-9 & -13\end{vmatrix} = -13(x_K+5) - (-9)\times 7$

$\det(\vec{AK};\vec{AB}) = -13x_K - 65 + 63 = -13x_K - 2$.

$\det(\vec{AK};\vec{AB}) = 0 \iff -13x_K - 2 = 0 \iff 13x_K = -2 \iff x_K = \frac{-2}{13}$. $\mathcal{S} = \left\{-\frac{2}{13}\right\}$.

Ainsi (AB) coupe l'axe des abscisses en $\boxed{K\left(-\frac{2}{13} ; 0\right)}$

Exercice II

a) $(AB)\parallel(CD) \iff \vec{AB}$ et $\vec{CD}$ colinéaires $\iff \det(\vec{AB};\vec{CD}) = 0$.

or $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\18\end{pmatrix}$ et $\vec{CD}\begin{pmatrix}x+3\\12\end{pmatrix}$ $\det(\vec{AB};\vec{CD}) = \begin{vmatrix}3 & x+3\\18 & 12\end{vmatrix} = 3\times 12 - 18(x+3) = 36 - 18x - 54$.

$\det(\vec{AB};\vec{CD}) = 0 \iff -18x - 18 = 0 \iff 18x = -18 \iff x = -\frac{18}{18} = -1$. $\mathcal{S} = \{-1\}$.

$(AB)\parallel(CD)$ ssi $D(-1 ; 14)$.

b) $\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\18\end{pmatrix}$ et pour $x=-1$, $\vec{CD}\begin{pmatrix}-1+3=2\\12\end{pmatrix}$.

Ainsi $\vec{AB} \neq \vec{CD}$ vu que ces deux vecteurs n'ont pas les mêmes coordonnées. Donc ABDC n'est pas un pgm.

c) On prend ici $x = -1$ (oubli de l'énoncé :-c).

$\vec{AB}\begin{pmatrix}3\\18\end{pmatrix}$ donc $3\vec{AB}\begin{pmatrix}9\\54\end{pmatrix}$; $\vec{AC}\begin{pmatrix}-7\\8\end{pmatrix}$, donc $2\vec{AC}\begin{pmatrix}-14\\16\end{pmatrix}$.

Par suite, $3\vec{AB}+2\vec{AC}\begin{pmatrix}-5\\70\end{pmatrix}$, donc $\|3\vec{AB}+2\vec{AC}\| = \sqrt{(-5)^2+70^2} = \sqrt{25+4925} = \sqrt{4925}$

c $\|3\vec{AB}+2\vec{AC}\| = \sqrt{25\times 197} = 5\sqrt{197}$

Exercice III **Figure et conjectures faciles : alignement des dits points, et les dites droites sont concourantes.**

1) Dans le repère $(A;B;D)$:

$A(0;0)$; $B(1;0)$; $C(1;1)$; $D(0;1)$; $E\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$; $I\left(\frac{1}{2};0\right)$; $J\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} x_E - x_D = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \\ y_E - y_D = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{DI}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \\ 0 - 1 = -1 \end{pmatrix}$$

donc $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DI}$ (*) : $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont colinéaires et ayant le point D en commun, il en résulte que les points D, E, I sont alignés : la conjecture i) est donc validée.

(*) Si vous ne voyez pas cette relation (calcul mental sur les coordonnées), calculez $\det(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DI})$!

(3) $$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BJ}\begin{pmatrix} 0 - 1 = -1 \\ \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\det(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BJ}) = \begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \times (-1) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0.$$

Donc $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont colinéaires, donc les points B, E, J sont alignés ; la conjecture ii) est validée.

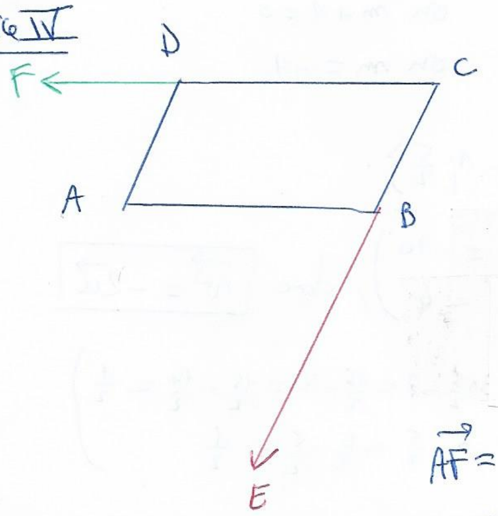
(4) D'après la question (2), D, E, I sont alignés, donc $E \in (DI)$.

D'après la question (3), B, E, J sont alignés, donc $E \in (BJ)$.

Par construction, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, donc A, E, C sont alignés, donc $E \in (AC)$.

Par suite, E est le point d'intersection des droites (AC), (DI) et (BJ) qui concourent donc en E.

Exercice IV



$\overrightarrow{BE} = -2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ (Chasles)

$\boxed{\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BC}}$ (*)

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$.

Or ABCD est un pgm, donc $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Donc $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\boxed{\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}}$ (**)

Grâce à (*) et (**), on a : $\overrightarrow{AF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$: les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires et ont le point A en commun, donc les points A, E et F sont alignés.

Exercice V

1) $\vec{u}\begin{pmatrix} 4-m \\ m-1 \end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix} 3m-7 \\ 3-m \end{pmatrix}$

1) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Or, $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 4-m & 3m-7 \\ m-1 & 3-m \end{vmatrix} = (4-m)(3-m) - (m-1)(3m-7)$.

$\det(\vec{u}; \vec{v}) = 12 - 4m - 3m + m^2 - (3m^2 - 7m - 3m + 7)$

$\det(\vec{u}; \vec{v}) = 12 - 7m + m^2 - 3m^2 + 10m - 7 = -2m^2 + 3m + 5$

$\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \iff -2m^2 + 3m + 5 = 0 \iff 2m^2 - 3m - 5 = 0$ $(A = 0 \iff -A = 0)$

Donc $\boxed{\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires si et seulement si } 2m^2 - 3m - 5 = 0}$

2a) $(2m-5)(m+1) = 2m^2 + 2m - 5m - 5 = 2m^2 - 3m - 5$.

2b) D'après 1) et 2a), $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $(2m-5)(m+1) = 0$

Ce qui équivaut (produit nul) à : $2m - 5 = 0$ ou $m + 1 = 0$

$m = \frac{5}{2}$ ou $m = -1$

$S = \{-1 ; \frac{5}{2}\}$.

*) Si $m = -1$, alors $\vec{u}\begin{pmatrix} 4-(-1) = 5 \\ -1-1 = -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -3-7 = -10 \\ 3-(-1) = 4 \end{pmatrix}$, donc $\boxed{\vec{v} = -2\vec{u}}$

**) Si $m = \frac{5}{2}$, alors $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 - \frac{5}{2} = \frac{8}{2} - \frac{5}{2} = \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \times \frac{5}{2} - 7 = \frac{15}{2} - 7 = \frac{15}{2} - \frac{14}{2} = \frac{1}{2} \\ 3 - \frac{5}{2} = \frac{6}{2} - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Donc $\boxed{\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{u}}$

Exercice VI

a) $\Omega = \{B ; V\}$ où B désigne l'événement obtenir une boule bleue et V obtenir une boule verte.

b) $\Omega = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

c) $\Omega = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ (écart minimal : $2-1=1$; écart maximal : $10-1=9$).

d) $\Omega = \{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$

e) $\Omega = \{3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15;16;17;18;19\}$. $\rightarrow$ Ω se note : $[\![3;19]\!]$

f) $\Omega = \{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12;13;14;15;16;17;18;19;20\}$ $\rightarrow$ Ω se note : $[\![2;20]\!]$.

On vient d'établir qu'il existe un unique point G tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ et que ce dernier est le point d'intersection des trois médianes du triangle ABC :

on a prouvé que quel que soit le triangle, ses trois médianes sont concourantes (= se coupent en un même point).