CORRECTION DU BAC BLANC DE MATHS

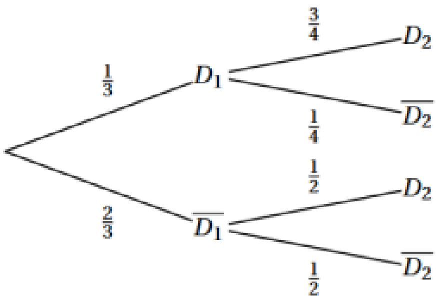
vendredi 6 février 2025 (8h 12h)

EXERCICE 1 : **Métropole 12 septembre 2024 jour 2 avec modifications**

Partie A : étude du cas particulier où $n = 2$

Dans cette partie, le robot réalise deux déplacements successifs.

1. On complète l'arbre pondéré suivant :



2. On a $P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) \times P_{D_1}(D_2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

3. De la même façon $P\left(\overline{D_1} \cap D_2\right) = P\left(\overline{D_1}\right) \times P_{\overline{D_1}}(D_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

   D'après la loi des probabilités totales :

   $p_2 = P(D_2) = P(D_1 \cap D_2) + P\left(\overline{D_1} \cap D_2\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{3+4}{3 \times 4} = \frac{7}{12}$.

4. On a d'abord $p\left(\overline{D_2}\right) = 1 - p(D_2) = 1 - \frac{7}{12} = \frac{5}{12}$.

   Il faut calculer la probabilité conditionnelle :

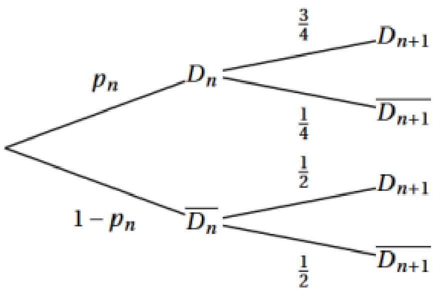
   $$p_{\overline{D_2}}(D_1) = \frac{p\left(\overline{D_2} \cap D_1\right)}{p\left(\overline{D_2}\right)} = \frac{p\left(D_1 \cap \overline{D_2}\right)}{p\left(\overline{D_2}\right)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Partie B : étude de la suite (p_n).

1.

$$p_{n+1} = \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2}$$

On reprend l'arbre initial en partant de la branche D_n pondérée par le nombre p_n et la branche $\overline{D_n}$ pondérée par $1 - p_n$, soit :



Toujours d'après la loi des probabilités totales :

$$p_{n+1} = P(D_{n+1}) = P(D_n) \times P_{D_n}(D_{n+1}) + P(\overline{D_n}) \times P_{\overline{D_n}}(D_{n+1}) = p_n \times \frac{3}{4} + (1 - p_n) \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} p_n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} p_n = \frac{1}{4} p_n + \frac{1}{2}$$

2.

a. Quel que soit $n \geqslant 1$, on a $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}p_n + \frac{3}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{4}p_n - \frac{1}{6}$

$$= \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{4}{6}\right) = \frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}u_n.$$

La relation $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n$, avec $n \geqslant 1$ montre que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$.

b. On sait que pour $n \geqslant 1$, $\quad u_n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Comme $-1 < \frac{1}{4} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = p_n - \frac{2}{3} = 0$ et finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{3}$.

Conclusion : sur un grand nombre de déplacements du robot celui-ci se dirigera en moyenne deux fois sur trois à droite et donc une fois sur trois à gauche.

PARTIE C :

a) On a dix répétitions identiques et indépendantes dans un schéma de Bernoulli, le succès ici étant d'aller à droite avec p = ¾ . X suit donc la loi binomiale de paramètres n = 10 et p = 3/4.

b) P(X = 7) = $\binom{10}{7}\left(\frac{3}{4}\right)^7\left(1-\frac{3}{4}\right)^{10-7}$ ≈ 0,25 (arrondie au centième).

La probabilité que le robot aille 7 fois à droite sur les 10 déplacements est de 25%.

c)

La variable aléatoire X égale au nombre de déplacements vers la droite suit une loi de Bernoulli de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{4}$.

La seule possibilité de revenir au point de départ est de faire (globalement) 5 déplacements à droite et donc 5 déplacements à gauche, soit :

$$P(X=5) = \binom{10}{5} \times \left(\frac{3}{4}\right)^5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5$$

P(X = 5) ≈ 0,058 (arrondie au millième)

d) P(X ≥ 1) = 1 – P(X = 0) ⟺ P(X ≥ 1) = 1 – $0{,}25^{10}$

D'où P(X ≥ 1) ≈ 0,999999 (arrondie au millionième)

e) P(X ≤ 4) ≈ 0,0197 (arrondie au dix-millième)

f) E(X) = 10 * ¾ = 7,5

Sur un très grand nombre de répétitions de dix déplacements aléatoires du robot, ce dernier faira en moyenne 7,5 déplacements vers la droite.

EXERCICE 2 : **Polynésie sept 2023**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3$.

1. $f'(x) = \frac{3}{2}x - 2 = \frac{3}{2}\left(x - \frac{4}{3}\right)$, donc $f'(x)$ est du signe de $x - \frac{4}{3}$ donc s'annule et change de signe pour $x = \frac{4}{3}$.

f est une fonction polynôme donc :

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{4}x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{4}x^2 = +\infty$.

De plus, $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} - 2 \times \frac{4}{3} + 3 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + \frac{9}{3} = \frac{5}{3}$.

On établit le tableau des variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$x - \frac{4}{3}$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{5}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

2. D'après le résultat précédent la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[\frac{4}{3} ; 2\right]$.

On a donc : $\frac{4}{3} \leqslant x \leqslant 2 \Longrightarrow f\left(\frac{4}{3}\right) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$.

Or $f\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{5}{3}$ et $f(2) = \frac{3}{4} \times 4 - 2 \times 2 + 3 = 3 - 4 + 3 = 2$.

Donc $\frac{5}{3} \leqslant f(x) \leqslant 2$ et *a fortiori* : $\frac{4}{3} \leqslant f(x) \leqslant 2$.

3. $f(x) - x = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3 - x = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 = \frac{3}{4}\left(x^2 - 4x + 4\right) = \frac{3}{4}(x-2)^2$

Pour tout réel x, $(x-2)^2 \geqslant 0$ donc $f(x) - x \geqslant 0$ donc $x \leqslant f(x)$.

On considère la suite (u_n) définie par un réel u_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$.

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$.

4. Étude du cas : $\frac{4}{3} \leqslant u_0 \leqslant 2$.

a. On va démontrer par récurrence que la propriété $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation**

  D'après la question précédente, pour $x \in \left[\frac{4}{3} ; 2\right]$, on a $x \leqslant f(x)$.

  Or $u_0 \in \left[\frac{4}{3} ; 2\right]$ donc $u_0 \leqslant f(u_0)$, ce qui revient à $u_0 \leqslant u_1$.

  De plus, si $x \in \left[\frac{4}{3} ; 2\right]$, $f(x) \in \left[\frac{4}{3} ; 2\right]$.

  Or $u_0 \in \left[\frac{4}{3} ; 2\right]$ donc $f(u_0) \in \left[\frac{4}{3} ; 2\right]$ et donc $u_1 \in \left[\frac{4}{3} ; 2\right]$ et donc $u_{n+1} \leqslant 2$.

  Donc $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$; la propriété est vraie au rang $n = 0$.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang n, c'est-à-dire $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

  On est dans l'intervalle $\left[\frac{4}{3} ; 2\right]$ donc la fonction f est croissante ; on en déduit : $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(2)$.

  Or $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(2) = 2$.

  Donc on a : $u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 2$; la propriété est héréditaire.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Pour tout n, on a $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ donc la suite (u_n) est croissante et majorée; d'après le théorème de la convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite ℓ telle que $\ell \leqslant 2$.

c. La suite (u_n) est définie par $f(u_n) = u_{n+1}$ où f est une fonction polynôme donc continue.

La suite (u_n) est convergente vers ℓ donc la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

$f(\ell) = \ell \iff f(\ell) - \ell = 0 \iff \dfrac{3}{4}(\ell - 2)^2 = 0 \iff \ell = 2$.

La suite (u_n) converge donc vers 2.

5. Étude du cas : $u_0 = 3$. On admet que dans ce cas la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

On complète la fonction « `seuil` » suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

```
def seuil() :
  u = 3
  n = 0
  while u < 100
      u = 3*u*u/4 - 2*u + 3
      n = n + 1
  return n
```

6. Étude du cas : $u_0 > 2$.

Pour tout réel x, on a : $x \leqslant f(x)$ donc, pour tout n, $u_n \leqslant f(u_n)$ soit $u_n \leqslant u_{n+1}$; la suite (u_n) est donc croissante.

On en déduit que pour tout n, on a : $u_n \geqslant u_0$.

Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, on aura donc : $\ell \geqslant u_0$.

On a vu que la seule limite possible de la suite (u_n) était $\ell = 2$; donc on ne peut pas avoir $\ell \geqslant u_0$ car $u_0 > 2$.

Pour $u_0 > 2$, la suite (u_n) n'est donc pas convergente.

Exercice 3

---

1)
$x>0$, $g(x) = 4\ln(3x)$ donc $g(2x) = 4\ln(3\times 2x) = 4\ln(6x)$.

Donc $g(2x) - g(x) = 4\ln(6x) - 4\ln(3x) = 4\ln\left(\frac{6x}{3x}\right) = 4\ln(2) = \ln(2^4) = \ln(16)$.

Donc $g(2x) = g(x) + \ln(16)$: Affirmation ① VRAIE

2) $x>0$ et $(\ln(x))^2 + 10\ln(x) + 21 = 0$.

Posons $y = \ln(x)$: on a : $y^2 + 10\ln(y) + 21 = 0$.

$\Delta = 10^2 - 4\times 1\times 21 = 16$.

$\Delta > 0$ donc deux racines réelles : $y_1 = \frac{-10-4}{2} = -7$ et $y_2 = \frac{-10+4}{2} = -3$.

Donc : $\ln(x) = -7$: $x = e^{-7}$ et $\ln(x) = -3$: $x = e^{-3}$.

$S = \{e^{-7} ; e^{-3}\}$: Affirmation 2 : FAUSSE

3) $x\in\mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(1+e^{-x}) = \ln(u(x))$ où $\begin{cases} u(x) = 1+e^{-x} \\ u'(x) = -e^{-x} \end{cases}$

$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

donc $f''(x) = \frac{e^{-x}(1+e^{-x}) - (-e^{-x})\times(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}+e^{-2x}-e^{-2x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

Or $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-x}>0$, donc $(1+e^{-x})^2>0$ et $f''(x)>0$: f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Affirmation 3 : FAUSSE.

4) T_0 a pour coefficient directeur $f'(0) \overset{(1,3)}{=} \frac{-e^0}{1+e^0} = -\frac{1}{2}$

(M_aN_a) a pour coefficient directeur : $m = \frac{f(a)-f(-a)}{a-(-a)} = \frac{\ln(1+e^{-a}) - \ln(1+e^{a})}{2a}$

$m = \frac{\ln(1+\frac{1}{e^a}) - \ln(1+e^a)}{2a} = \frac{\ln\left(\frac{e^a+1}{e^a}\right) - \ln(1+e^a)}{2a} = \cancel{\frac{\ln(e^a+1) - \ln(e^a) - \ln(1+e^a)}{2a}}$

$m = \frac{-a}{2a} = -\frac{1}{2}$. Ainsi (T_0) et (M_aN_a) ont m̂ coefficient directeur et sont parallèles. Affirmation 4 : VRAIE

EXERCICE 3 : **VRAI OU FAUX**

PROPOSITION 1 : **FAUX**

Dans le repère proposé, D(0 ; 1 ; 0) ; C(1 ; 1 ; 0) ; F(1 ; 0 ; 1).

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\\\dots\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\\\dots\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

On traduit en termes de coordonnées l'égalité vectorielle du sujet.

On obtient les coordonnées de N : N(1 ; ½ ; ½).

PROPOSITION 2 : VRAI

Les coordonnées de P sont (1/4 ; 1 ; 1).

Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\\\dots\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{PM}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

On prend le vecteur $-2\overrightarrow{PM}$ comme vecteur directeur de (PM).

On obtient bien la représentation paramétrique proposée dans le sujet.

PROPOSITION 3 : vrai

Vecteur directeur de (PK) : $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix}$

Vecteur directeur de (MB) : $\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}\dots\\\dots\\\dots\end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car 1 x 3 = 3 mais -1 x 3 ≠ -4 donc les droites (PK) et (MB) ne sont pas parallèles.

Représentation paramétrique de (MB) : $\begin{cases} x = 1 + u \\ y = -\frac{1}{2}u \\ z = -u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$

On résout $\begin{cases} 1 + 3t' = 1 + u \\ \frac{1}{2} - 2t' = -\frac{1}{2}u \\ -4t' = -u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3t' = u \\ \frac{1}{2} - 2t' = -\frac{1}{2}u \\ 4t' = u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 0 \\ -1 = u \\ 0 = -u \end{cases}$

Donc pas de solution.

Donc les droites sont non coplanaires

PROPOSITION 4 : VRAI

Est-ce que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{AK}$?

$\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{EB}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AK}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

On trouve : $\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{EB}$

(si pas évident de trouver cette combinaison linéaire, passer par un système)

Donc oui ils sont coplanaires.

EXERCICE 4 :

Exercice 3

Partie A

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$, donc par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x+1) = +\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} 4 = 4$, donc par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{e^x+1} = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$.

De même, comme $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^x+1) = 1$, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation $y=0$ (à savoir l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 4$, donc la droite d'équation $y=4$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

3) On étudie le signe de f'' sur $\mathbb{R}$:

$\forall x\in\mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $4>0$, donc $4e^x > 0$ et $e^x+1 > 1 > 0$, donc (règle des signes) $(e^x+1)^3 > 0$.

Par suite, $f''(x)$ a le même signe que $e^x - 1$:

$f''(x) \geq 0$ équivaut à : $e^x - 1 \geq 0$

$e^x \geq 1$

$e^x \geq e^0$

$x \geq 0$.

Donc on a :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$
f	Concave		Convexe

Conclusion : f est concave sur $]-\infty ; 0]$.
f est convexe sur $[0 ; +\infty[$.
$\mathcal{C}_f$ admet un seul point d'inflexion le point nommé A d'abscisse 0 et d'ordonnée $f(0) = \frac{4}{e^0+1} = \frac{4}{2} = 2$: $A(0;2)$

Partie B $\quad g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1) Par limites du cours : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to-\infty} 1 = 1$

donc par limites de somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1}$

En $+\infty$, si on ne modifie pas l'expression de $g(x)$, on a une forme indéterminée.

Or, $g(x) = e^x(1-x) + 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$:

Donc par limite de produit et de somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty}$

2a) $g(x) = e^x - xe^x + 1 = e^x(1-x) + 1$.

$g = uv + w$ où pour tout réel x : $\begin{cases} u(x) = e^x \\ u'(x) = e^x \end{cases}$ $\begin{cases} v(x) = 1-x \\ v'(x) = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} w(x) = 1 \\ w'(x) = 0 \end{cases}$.

g est la somme et le produit de fonctions u, v et w dérivables sur $\mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$

et pour tout réel x : $g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + w'(x)$

$$g'(x) = e^x(1-x) + e^x \times (-1) + 0$$

$$g'(x) = e^x - xe^x - e^x$$

$$\boxed{g'(x) = -xe^x}$$

2b) On étudie le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$, donc $g'(x)$ a le même signe que $-x$.

Donc $g'(x) \geq 0 \iff -x \geq 0 \iff x \leq 0$.

Donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

$g(0) = e^0 - 0 \times e^0 + 1 = 1 + 1 = 2$

3a) Si $x \in]-\infty ; 0]$, alors $g(x) > 1$ d'après le tableau précédent.

Donc sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$, l'équation $g(x) = 0$ n'admet aucune solution.

Sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$: - f est continue (car dérivable sur $[0 ; +\infty[$)

- f est strictement croissante d'après q. 2b).
- $0 \in]-\infty ; 2]$ donc 0 est une valeur intermédiaire pour f sur cet intervalle.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α, avec $\alpha \in [0 ; +\infty[$.

Conclusion : $g(x) = 0$ admet une unique solution réelle.

3b) L'utilisation d'une machine à calculer (méthode des balayages successifs, ou dichotomie...) conduit à :

x	$g(x)$
1,27	0,0386
α	0
1,28	$-0{,}007$

Donc : $\boxed{1{,}27 < \alpha < 1{,}28}$

4) Par définition de α, on a : $g(\alpha)=0$ c'est-à-dire :

$$e^{\alpha}-\alpha e^{\alpha}+1=0$$

$$1=\alpha e^{\alpha}-e^{\alpha}$$

$$1=e^{\alpha}(\alpha-1)$$

alors $\boxed{e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}}$ ($\alpha-1\neq 0$ car $\alpha>1$ au vu de l'encadrement de la q. 3b).

5) Complétons le tableau de variation de la q. 2b) et plaçons α :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$
Signe de $g(x)$		$+$			0	$-$	

Partie C

0) $M(x;f(x))$ car $M\in\mathcal{C}_f$ et M a pour abscisse x. Donc $\boxed{M\left(x;\dfrac{4}{e^{x}+1}\right)}$

$\boxed{B(x;0)}$ et $U(0;f(x))$ c'est-à-dire $\boxed{U\left(0;\dfrac{4}{e^{x}+1}\right)}$

1) a) $a(x)=OB\times BM$ avec $OB=x$ car $x\geq 0$ et $BM=f(x)=\dfrac{4}{e^{x}+1}$ (>0).

Donc $\boxed{a(x)}=x\times\dfrac{4}{e^{x}+1}=\boxed{\dfrac{4x}{e^{x}+1}}$

b) $a(x)=\dfrac{4x}{e^{x}+1}=\dfrac{\beta(x)}{\gamma(x)}$ où : $\begin{cases}\beta(x)=4x\\ \beta'(x)=4\end{cases}$ $\begin{cases}\gamma(x)=e^{x}+1\\ \gamma'(x)=e^{x}\end{cases}$.

Donc a est dérivable sur $[0;+\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$ (et $e^{x}+1\neq 0$).

et $\boxed{a'(x)}=\dfrac{\beta'(x)\gamma(x)-\beta(x)\gamma'(x)}{\gamma^{2}(x)}=\dfrac{4(e^{x}+1)-4xe^{x}}{(e^{x}+1)^{2}}=\dfrac{4(e^{x}+1-xe^{x})}{(e^{x}+1)^{2}}=\boxed{\dfrac{4g(x)}{(e^{x}+1)^{2}}}$

c) On étudie le signe de $a'(x)$ sur $[0;+\infty[$: $4>0$; $e^{x}>0$ donc $(e^{x}+1)^{2}>0$, donc $a'(x)$ a le même signe que $g(x)$ sur $[0;+\infty[$.

Donc d'après la question 5), Partie B, on a :

x	0		α		$+\infty$
$a'(x)$		$+$	0	$-$	
$a(x)$	0	$\nearrow$	$4(\alpha-1)$	$\searrow$	0

$a(\alpha)=\dfrac{4\alpha}{e^{\alpha}+1}$ et $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha-1}$ q.4 B

donc $a(\alpha)=\dfrac{4\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1}=\dfrac{4\alpha}{\frac{1+\alpha-1}{\alpha-1}}=\dfrac{4\alpha(\alpha-1)}{\alpha}=4(\alpha-1)$

2) $\mathcal{A}$ croît sur $[0;\alpha]$ et décroît sur $[\alpha;+\infty[$. (question précédente).

Donc $\mathcal{A}$ admet un maximum sur $[0;+\infty[$ atteint lorsque $x=\alpha$.

Comme $\mathcal{A}$ est l'aire du rectangle OBMU, il en résulte que cette dernière est maximale lorsque $x=\alpha$.

3) La tangente à $\mathcal{C}_f$ en le point M d'abscisse α a pour coefficient directeur $f'(\alpha)$.

$M(\alpha; f(\alpha))$, donc $U(0; f(\alpha))$ d'après q.1) et $B(\alpha; 0)$.

Donc (BU) a pour coefficient directeur $\boxed{m} = \dfrac{y_U - y_B}{x_U - x_B} = \dfrac{f(\alpha)-0}{0-\alpha} = \boxed{\dfrac{-f(\alpha)}{\alpha}} = \boxed{\dfrac{-4}{\alpha(e^{\alpha}+1)}}$

La tangente en M à $\mathcal{C}_f$ et (BU) sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

Nous devons donc prouver que : $f'(\alpha) = \dfrac{-f(\alpha)}{\alpha}$:

Or, $f(x) = \dfrac{4}{e^x+1} = 4 \times \dfrac{1}{\gamma(x)}$ où $\begin{cases} \gamma(x) = e^x+1 \\ \gamma'(x) = e^x \end{cases}$

donc $f'(x) = 4 \times \dfrac{-\gamma'(x)}{\gamma^2(x)} = \dfrac{-4e^x}{(e^x+1)^2}$

donc $\boxed{f'(\alpha)} = \dfrac{-4e^{\alpha}}{(e^{\alpha}+1)^2} = \boxed{\dfrac{-4}{e^{\alpha}+1} \times \dfrac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}}$ (*)

Or d'après q.4) partie $\boxed{B}$, $e^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-1}$, donc $\boxed{\dfrac{e^{\alpha}}{e^{\alpha}+1}} = \dfrac{\frac{1}{\alpha-1}}{\frac{1}{\alpha-1}+1} = \dfrac{\frac{1}{\alpha-1}}{\frac{1+\alpha-1}{\alpha-1}} = \dfrac{\frac{1}{\alpha-1}}{\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \boxed{\dfrac{1}{\alpha}}$

Par suite, $f'(\alpha) \overset{(*)}{=} \dfrac{-4}{e^{\alpha}+1} \times \dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{-4}{\alpha(e^{\alpha}+1)} = m$.

Donc la tangente en $M(\alpha; f(\alpha))$ et (BU) sont parallèles.