Exercice I

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n$.

$u_n \leqslant 10^{-9} \iff 3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \leqslant 10^{-9} \iff \ln\left(3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n\right) \leqslant \ln(10^{-9})$ par croissance de $\ln$ sur $]0;+\infty[$

$u_n \leqslant 10^{-9} \iff \ln(3) + \ln\left(\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) \leqslant -9\ln(10)$ car $\begin{cases} \ln(a^n) = n\ln(a) \\ \ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \quad a,b>0 \\ \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a) \end{cases}$

$u_n \leqslant 10^{-9} \iff n\ln\left(\frac{1}{5}\right) \leqslant -9\ln(10) - \ln(3)$

$u_n \leqslant 10^{-9} \iff -n\ln(5) \leqslant -9\ln(10) - \ln(3)$

$u_n \leqslant 10^{-9} \iff n \geqslant \dfrac{-9\ln(10) - \ln(3)}{-\ln(5)}$ car $-\ln(5) < 0$. $(-\ln(5) \approx -1,6)$

$u_n \leqslant 10^{-9} \iff n \geqslant \dfrac{9\ln(10) + \ln(3)}{\ln(5)}$. Or (machine), $\dfrac{9\ln(10)+\ln(3)}{\ln(5)} \approx 13,56$

Ainsi, $\boxed{u_n \leqslant 10^{-9} \iff n \geqslant n_0, \text{ où } n_0 = 14}$.

Exercice II

Partie A : exploitation du graphique.

1. On lit que B a pour coordonnées $(-1\ ;\ -2)$, or la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par B, donc $f(-1) = f(x_B) = y_B = -2$.

   On nous dit que la tangente T, tangente à $\mathscr{C}_f$ en B, d'abscisse -1, est aussi la droite (AB), dont le coefficient directeur est 1, donc $f'(-1) = 1$.

2. La fonction f n'est manifestement pas convexe sur son ensemble de définition, car la courbe $\mathscr{C}_f$ passe en dessous de sa tangente T pour les valeurs x inférieures à $-1,7$, environ. Si la fonction était convexe sur tout son ensemble de définition, elle serait au-dessus de n'importe quelle tangente, sur tout son ensemble de définition.

   Ici, on a l'impression que la fonction est d'abord concave, puis convexe, avec un point d'inflexion dont l'abscisse est aux alentours de $-1,4$.

3. De ce que l'on peut voir de $\mathscr{C}_f$, on ne voit qu'une seule solution à l'équation, qui est environ 0,1 (à 10^{-1} près).

Partie B : étude de la fonction f.

1. On a : $\lim\limits_{x \to -2} x^2 + 2x - 1 = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 1 = -1$, car $x \longmapsto x^2 + 2x - 1$ est une fonction polynôme, continue sur $\mathbb{R}$ et donc notamment continue en -2.

   de plus : $\lim\limits_{x \to -2} (x+2) = 0$

   et donc, par composition : $\lim\limits_{x \to -2} \ln(x+2) = \lim\limits_{y \to 0} \ln(y) = -\infty$

   finalement, par limite de la somme : $\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -\infty$.

   Graphiquement, cela signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale, d'équation $x = -2$.

2. *Remarque :* la justification de la dérivabilité de f, donnée ci-après, n'est généralement pas attendue.

   La fonction $x \longmapsto \ln(x+2)$ est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$, en tant que composée de $x \longmapsto x+2$ définie et dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$, où la fonction ln est définie et dérivable.

   f est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$, en tant que somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (une fonction polynôme et une fonction composée).

   $$\forall x \in]-2\,;\,+\infty[,\quad f'(x) = 2x + 2 + 0 + \frac{1}{x+2} = \frac{(2x+2)(x+2)+1}{x+2} = \frac{2x^2+4x+2x+4+1}{x+2} = \frac{2x^2+6x+5}{x+2}.$$

   On arrive bien à l'expression attendue pour la fonction dérivée f'.

3. Pour tout x réel strictement supérieur à -2, $x+2$ est strictement positif, donc le signe de $f'(x)$ est le signe de son numérateur. Ledit numérateur étant une expression polynomiale de degré 2 ayant un coefficient dominant (2) positif, cela signifie que les images seront positives, sauf entre d'éventuelles racines.

   Déterminons le discriminant du numérateur : $\Delta = 6^2 - 4 \times 2 \times 5 = 36 - 40 = -4 < 0$.

   Le trinôme n'a donc pas de racines réelles, et a donc des images strictement positives pour tout x réel.

   f' est donc une fonction à valeurs strictement positives sur $]-2\,;\,+\infty[$, et f est donc strictement croissante sur $]-2\,;\,+\infty[$.

On peut donc établir le tableau de variations suivant :

x	-2	$+\infty$
signe de $f'(x)$	‖	$+$
variations de f	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

4. La fonction f est continue (car dérivable) sur $]-2\ ;\ +\infty[$, de plus, elle est strictement croissante sur cet intervalle et enfin, 0 est une valeur intermédiaire entre $\lim\limits_{-2} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué aux fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $]-2\ ;\ +\infty[$, que l'on notera α.

Avec une exploration à la calculatrice (éclairée par notre lecture graphique de la partie A), on trouve $0,115 < \alpha < 0,12$, donc une valeur approchée à 10^{-2} de α est $1,12$.

5. Puisque f est strictement croissante sur $]-2\ ;\ +\infty[$, on a :

$$-2 < x < \alpha \implies f(x) < f(\alpha) \implies f(x) < 0 \qquad\qquad \alpha < x \implies f(\alpha) < f(x) \implies 0 < f(x)$$

f est donc à valeurs strictement négatives sur $]-2\ ;\ \alpha[$, nulle pour $x = \alpha$ et à valeurs strictement positives sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$.

Partie C : une distance minimale.

1. Le point J a pour coordonnées $(0\ ;\ 1)$ et M a pour coordonnées $\left(x\ ;\ g(x)\right)$.

   Comme on est dans un repère orthonormé, on a : $\mathrm{J}M = \sqrt{(x_M - x_\mathrm{J})^2 + (y_M - y_\mathrm{J})^2}$

   Donc, $\forall x \in]-2\ ;\ +\infty[$,
   $$\begin{aligned} h(x) &= \mathrm{J}M^2 \\ &= (x_M - x_\mathrm{J})^2 + (y_M - y_\mathrm{J})^2 \\ &= (x-0)^2 + \left(g(x) - 1\right)^2 \\ &= x^2 + \left[\ln(x+2) - 1\right]^2. \end{aligned}$$

   On arrive bien à l'expression attendue.

2. **a.** La fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et la distance JM est nécessairement positive, en tant que distance.

   Donc $\mathrm{J}M_{x_1} \leqslant \mathrm{J}M_{x_2} \iff \mathrm{J}M_{x_1}^2 \leqslant \mathrm{J}M_{x_2}^2$.

   La distance JM sera donc minimale pour la valeur x qui rend minimale le carré de cette distance, c'est-à-dire $h(x)$.

   On sait que, pour tout x dans $]-2\ ;\ +\infty[$, $\dfrac{2}{x+2}$ est strictement positif, donc $h'(x)$ est du signe de $f(x)$.

   On peut donc établir le tableau suivant :

x	-2			α		$+\infty$
signe de $f(x)$	||		$-$	0	$+$	
signe de $h'(x)$	||		$-$	0	$+$	
variations de h	||		$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	

b. Comme h est décroissante sur $]-2\,;\,\alpha[$ et croissante sur $]\alpha\,;\,+\infty[$, la valeur de x pour laquelle la distance JM est minimale est donc bien le nombre α, solution de l'équation $f(x)=0$, défini à la question **4.** de la **partie B**.

3. a. On sait que α est la solution de l'équation $f(x)=0$.

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\iff x^2+2x-1+\ln(x+2)=0 \\ &\iff \ln(x+2)=1-2x-x^2 \end{aligned}$$

Comme α est solution de cette équation, on en déduit bien :
$\ln(\alpha+2)=1-2\alpha-\alpha^2$.

b. La tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α a pour coefficient directeur : $g'(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+2}$.

La droite $(\mathrm{J}M_\alpha)$ a pour coefficient directeur :

$$\frac{y_{M_\alpha}-y_\mathrm{J}}{x_{M_\alpha}-x_\mathrm{J}}=\frac{g(\alpha)-1}{\alpha-0}=\frac{\ln(\alpha+2)-1}{\alpha}=\frac{1-2\alpha-\alpha^2-1}{\alpha}=\frac{\alpha(-2-\alpha)}{\alpha}=-2-\alpha.$$

Le produit de ces deux coefficients directeurs est donc : $\dfrac{1}{\alpha+2}\times(-2-\alpha)=-1$.

On en déduit dont que la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point M_α et la droite $(\mathrm{J}M_\alpha)$ sont perpendiculaires.

Exercice III

1. • Limite en 0 :

$\lim\limits_{x\to0} x^2=0$ et, d'après la propriété des croissances comparées : $\lim\limits_{x\to0} x\ln(x)=0$

Par limite de la somme, on a donc : $\lim\limits_{x\to0} x^2-x\ln(x)=0$

• Limite en $+\infty$:

$f(x)=x^2-x\ln(x)=x^2\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)$

Par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$ donc, par limite de la somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=1$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$, donc, par limite du produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(1-\dfrac{\ln(x)}{x}\right)=+\infty$

2. Pour tout réel x strictement positif, on a : $f'(x)=2x-1\times\ln(x)-x\times\dfrac{1}{x}=2x-1-\ln(x)$.

3. Pour tout réel x strictement positif, on a : $f''(x) = 2 - 0 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x-1}{x}$.

4. Déterminons le signe de $2x-1$:

$$\begin{aligned} 2x-1>0 &\iff 2x>1 \\ &\iff x>\frac{1}{2} \end{aligned}$$

L'image pertinente est : (les limites aux bornes ne sont pas attendues)

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\times\dfrac{1}{2} - 1 - \ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1 - 1 + \ln(2) = \ln(2)$

On a donc :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $2x-1$		$-$	0	$+$	
signe de x	0	$+$		$+$	
signe de $f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de f'	‖	↘	$\ln(2)$	↗	

5. Le minimum de la fonction f' sur $]0\,;\,+\infty[$ est donc $\ln(2)$ qui est strictement positif, donc, sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)>0$ et donc, la fonction f est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

6.

6) $f''(x) = \dfrac{2x-1}{x}$ avec $x>0$.

donc $f''(x)$ a même signe que $2x-1$.

Ainsi, $f''(x)\geq 0$ équivaut à $2x-1\geq 0$, c'est-à-dire à $x\geq\frac{1}{2}$.

Ainsi par critère de convexité : f est convexe sur $[\frac{1}{2};+\infty[$ et f est concave sur $]0;\frac{1}{2}]$.

f'' s'annule et change de signe lorsque $x=\frac{1}{2}$: Ainsi, la courbe représentative de f admet un unique point d'inflexion : le point nommé A avec :

$x_A=\frac{1}{2}$ et $\underbrace{y_A = f(x_A)}_{\text{car } A\in\mathcal{C}_f\,!} = f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\times(-\ln(2))$

$y_A = \frac{1}{4} + \frac{\ln(2)}{2} = \dfrac{1+2\ln(2)}{4}$

donc $A\left(\frac{1}{2};\dfrac{1+2\ln(2)}{4}\right)$ est l'unique point d'inflexion de f sur $]0;+\infty[$

Partie B :

1. Pour tout réel x strictement positif, on a : $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.

   Déterminons le signe de $x - 1$:

   $x - 1 > 0 \iff x > 1$

   L'image pertinente est : (les limites aux bornes ne sont pas attendues)

   $g(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 = 1$

   On a donc :

x	0		1		$+\infty$
signe de $x-1$		$-$	0	$+$	
signe de x	0	$+$		$+$	
signe de $g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
variations de g	‖	$\searrow$	1	$\nearrow$	

2. $$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x = x^2 - x\ln(x) \\ &\iff 0 = x^2 - x - x\ln(x) \\ &\iff 0 = x(x - 1 - \ln(x)) \\ &\iff 0 = x - 1 - \ln(x) \quad \text{car } x > 0 \quad \text{donc } x \neq 0 \\ &\iff 1 = x - \ln(x) \\ &\iff 1 = g(x) \\ &\iff x = 1 \end{aligned}$$

   L'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur $]0\ ;\ +\infty[$, cette solution est $x = 1$.

Partie C :

1. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Initialisation : Calculons u_1. $u_1 = f(u_0) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{\ln(2)}{2} \approx 0,597$.

On constate que l'inégalité est vraie pour $n = 0$, on a bien : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 1$.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

Montrons que l'inégalité est vraie au rang suivant :

Par hypothèse de récurrence on a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 &\Longrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(1)\\ &\quad \text{car } f \text{ est strictement croissante sur }]0\,;\,+\infty[\\ &\Longrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1\\ &\quad \text{car } f \text{ est la fonction de récurrence de la suite } (u_n)\\ &\Longrightarrow \frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 1\\ &\quad \text{car } f\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,60 > \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ceci montre que les inégalités sont vraies au rang $n+1$.

Conclusion : Les inégalités sont vraies au rang 0, et si elle sont vraies au rang n naturel, elles sont vraies au rang suivant $n+1$, donc, en vertu du principe de récurrence, on a :

$\forall n \in \mathbb{N},\quad \dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.

2. On a notamment :

- $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \leqslant u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc croissante.
- $\forall n \in \mathbb{N},\quad \dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant 1$. La suite (u_n) est donc bornée par $\dfrac{1}{2}$ et 1.

La suite étant croissante et majorée, on en déduit qu'elle est convergente, vers une limite ℓ vérifiant $\dfrac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant 1$

3. La suite (u_n) est une suite convergente, définie par récurrence par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où la fonction f est continue (car dérivable) sur $]0\,;\,+\infty[$, intervalle qui contient la limite ℓ de la suite.

D'après le théorème « du point fixe », on en déduit que la limite ne peut être qu'une solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

D'après la question **2.** de la **Partie B**, cette équation n'a qu'une solution dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$: 1.

La suite (u_n) converge donc vers $\ell = 1$.

4.a.

```
# Créé par MonReconditionne.fr, le 22/01/2025 en Python 3.7
from math import*
def seuil(x):
    u=0.5
    n=0
    while u<=x:
        n=n+1
        u=u**2-u*log(u)
    return n
```

4.b.

On obtient après avoir tapé seuil(0.99) : 196 : il faut ici s'aider de sa machine, menu suite, ou bien programmer l'algorithme complété de 4.a.

4.c. Appeler seuil(1) entrainerait aucun affichage en sortie, et un programme qui tourne en boucle infiniment, car d'après la question 2) et 3) la suite croit et converge vers 1, donc tous ses termes son inférieurs à 1 (la valeur limite 1 n'est pas atteinte = il n'existe aucun entier n pour lequel u_n = 1).