Exercice I

Partie A

a) $f(x) = x^2 + e^{-2x}$.

Par limites de référence : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X = +\infty$, donc par limite de composée, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-2x} = +\infty$, et par limite de somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x) = -\infty$; $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$, donc par composée et somme on a :

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

b) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

Rappel : $x \mapsto e^{u(x)}$ se dérive en $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$

$f'(x) = 2x + (-2)e^{-2x}$

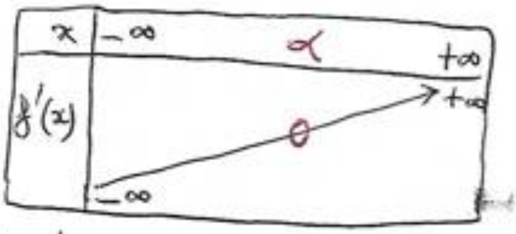
$\boxed{f''(x)} = 2 + (-2)\times(-2)e^{-2x} = 2 + 4e^{-2x} = \boxed{2(1+2e^{-2x})}$

c) $2>0$; $1>0$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $e^{-2x}>0$, donc $f''(x)>0$ par produit et somme de nombres positifs.

Donc par critère de convexité, $\boxed{f \text{ est convexe sur } \mathbb{R}}$.

Par suite, $\boxed{f' \text{ croît sur } \mathbb{R}}$ (caractérisation de la convexité).

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty$.



e) *) f' est continue sur $\mathbb{R}$ car dérivable sur $\mathbb{R}$

**) f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (q.d).

***) $0 \in]-\infty;+\infty[$

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation : $f'(x)=0$ admet une unique solution notée α sur $\mathbb{R}$: $f'(\alpha)=0$.

f) Par la méthode des balayages :

Pas égal à 1 :

x	$f'(x)$
0	-2
α	0
1	1,72

$0<\alpha<1$

Pas égal à 0,1 :

x	$f'(x)$
0,4	$-0,01$
α	0
0,5	0,264

$0,4<\alpha<0,5$

Pas égal à 0,01 :

x	$f'(x)$
0,42	−0,023
0,43	0,0137

$\boxed{0,42 < \alpha < 0,43}$ Encadrement à 10^{-2} près de α.

g) Reprenons le tableau de variation de la question d) complété avec α :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\alpha^2+e^{-2\alpha}$	$\nearrow$	$+\infty$

f' croît sur $]-\infty;\alpha]$ et $f(\alpha)=0$, donc $\forall x\in]-\infty;\alpha]$, $f(x)\leqslant 0$.

h) f décroît sur $]-\infty;\alpha]$ et croît sur $[\alpha;+\infty[$, donc f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint lorsque $x=\alpha$.

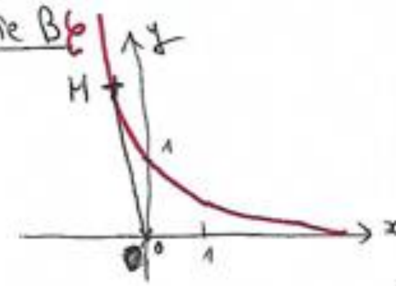
Ce minimum est égal à $f(\alpha)=\alpha^2+e^{-2\alpha}$.

Or par définition de α, $f'(\alpha)=0$ c'est-à-dire $2\alpha-2e^{-2\alpha}=0$, donc $e^{-2\alpha}=\alpha$

et par suite, $\boxed{f(\alpha)}=\alpha^2+\alpha=\boxed{\alpha(\alpha+1)}$

Partie B

1)



$O(0;0)$

$M(x;h(x))$ car $M\in\mathcal{C}$

$M(x;e^{-x})$.

$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix}x\\e^{-x}\end{pmatrix}$

et $OM=\|\overrightarrow{OM}\|=\sqrt{x^2+(e^{-x})^2}$

donc $OM=\sqrt{x^2+(e^{-x})^2}$

Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x^2+e^{-2x}}=\sqrt{f(x)}$ où $f(x)=x^2+e^{-2x}$.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et positive sur $\mathbb{R}$ ($\forall x\in\mathbb{R}$, $x^2\geqslant 0$; $e^{-2x}>0$, donc $x^2+e^{-2x}>0$).
donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$. Ainsi, comme $2\sqrt{f(x)}>0$, $g'(x)$ a le même signe que $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et grâce à q. g) on a :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$\sqrt{\alpha(\alpha+1)}$	$\nearrow$	

g a les mêmes sens de variation que f, donc g admet un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint lorsque $x=\alpha$.

$g(\alpha)=\sqrt{f(\alpha)}=\sqrt{\alpha(\alpha+1)}$

C'est donc le point $A(\alpha;e^{-\alpha})$ de $\mathcal{C}$ qui est le plus proche de O (q. h) car $OM=g(x)$ et g minimale en α sur $\mathbb{R}$)

Exercice II

1a) Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

1b) $\lim\limits_{\begin{cases}x\to 0\\ x>0\end{cases}} e^x = 1$ et $\lim\limits_{\begin{cases}x\to 0\\ x>0\end{cases}} x = 0^+$, donc par limite de quotient, $\lim\limits_{\begin{cases}x\to 0\\ x>0\end{cases}} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Vu que $\lim\limits_{\begin{cases}x\to 0\\ x>0\end{cases}} f(x) = +\infty$, la droite d'équation : x = 0, à savoir l'axe des ordonnées est asymptote verticale à C_f.

2)

Pour déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on cherche le signe de $f'(x)$.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$f(1) = \frac{e^1}{1} = e$

On établit le tableau de variations de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

3. la rédaction de cette question nécessite, dans le cas où m > e, d'utiliser le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires appliqué sur chacun des intervalles]0 ;1] et [1 ; +∞[.

Soit m un nombre réel. On cherche, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Cela revient à chercher le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite horizontale d'équation $y = m$.

D'après le tableau de variations :

- si $m < e$, l'équation $f(x) = m$ n'admet pas de solution ;
- si $m = e$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique $x = 1$;
- si $m > e$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.

Sujet B

Exercice I

Tout est similaire, si ce n'est qu'ici on a :

Partie A question h) : $f(x) = x^2 + e^{-4x}$, donc $f'(x) = 2x - 4e^{-4x}$.

Par définition de α, $f'(\alpha)=0$, donc $2\alpha - 4e^{-4\alpha} = 0$, donc : $2\alpha = 4e^{-4\alpha}$ et $e^{-4\alpha} = \frac{2\alpha}{4} = \frac{\alpha}{2}$.

Par suite, $f(\alpha) = \alpha^2 + e^{-4\alpha} = \alpha^2 + \frac{\alpha}{2} = \alpha(\alpha + 0{,}5)$.

Pour la partie B : h(x)= e^{-2x}, donc $g(x) = \sqrt{x^2 + (e^{-2x})^2} = \sqrt{x^2 + e^{-4x}}$.

Exercice II

1a) La limite de f en $-\infty$ est égale à $-\infty$ par limite de quotient et car la limite en $-\infty$ de l'exponentielle est 0^+.

1b) Par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, *donc par limite de quotient,* $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$, l'axe des abscisses d'équation y = 0 est donc asymptote horizontale à la courbe de f en $+\infty$.

2)Vu que l'exponentielle est à valeurs strictement positives, f'(x) a le même signe que -x +1.

Or $-x + 1 \geqslant 0$ équivaut à $x \leqslant 1$.

Donc f croit sur $]-\infty ; 1]$ et décroit sur $[1 ; +\infty[$.

Le tableau de variation complet découle de là, et f admet pour maximum sur $\mathbb{R}$ la valeur : $f(1)=\frac{1}{e}$.

3) Comme pour le sujet A :

Si $m > \frac{1}{e}$, alors f(x) =m n'a aucune solution sur $\mathbb{R}$.

Si $m = \frac{1}{e}$, alors f(x) =m a une unique solution réelle, le nombre 1.

Si $m < \frac{1}{e}$, alors f(x) =m a deux solutions sur $\mathbb{R}$ (conséquence du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires respectivement appliqué sur chacun des intervalles : $]-\infty ; 1]$, puis $[1 ; +\infty[$.