On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right) e^{-x} + x$.

1. On détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

- Limite en $-\infty$

$$\left.\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \dfrac{1}{2}\right) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty\end{array}\right\} \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x + \dfrac{1}{2}\right) e^{-x} = -\infty \atop \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty \right\} \text{donc } \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

- Limite en $+\infty$

$f(x) = x e^{-x} + \dfrac{1}{2} e^{-x} + x$. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et que

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{2} e^{-x} = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty\end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

La rédaction ne mentionne pas par produit, somme de limites, et croissances comparées : c'est un tort.

Pour la question 2a), il est souhaitable de dire : f(x) =u(x)v(x) avec : ...... et de rappeler la formule de dérivation d'un produit.

2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right) e^{-x} + x$ donc

$f'(x) = 1 \times e^{-x} + \left(x + \dfrac{1}{2}\right) \times (-1) e^{-x} + 1 = \left(-x + \dfrac{1}{2}\right) e^{-x} + 1$, et donc

$f''(x) = -1 \times e^{-x} + \left(-x + \dfrac{1}{2}\right) \times (-1) e^{-x} = \left(x - \dfrac{3}{2}\right) e^{-x}$.

b. Le signe de f'' donne les variations de f'.

Pour tout x, $e^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)$.

- Si $x < \dfrac{3}{2}$, $f''(x) < 0$ donc f' est décroissante;
- Si $x > \dfrac{3}{2}$, $f''(x) > 0$ donc f' est croissante;
- Si $x = \dfrac{3}{2}$, $f''(x) = 0$ donc f' admet un minimum égal à $f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = \left(-\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{2}\right) e^{-\frac{3}{2}} + 1 = 1 - e^{-\frac{3}{2}}$.

On dresse le tableau de variation de f' (sans les limites) :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$\searrow$	$1-e^{-\frac{3}{2}}$	$\nearrow$	

c. La fonction f' admet pour minimum

$f'\left(\dfrac{3}{2}\right) = 1 - e^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}78 > 0$; donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.

d.
- La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout réel x, $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

e. On appelle α la solution de l'équation $f(x) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) \approx -2{,}36 < 0 \\ f(0) = 0{,}5 > 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \alpha \in [-1\,;\,0]$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-0{,}3) \approx -0{,}03 < 0 \\ f(-0{,}2) \approx 0{,}17 > 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \alpha \in [-0{,}3\,;\,-0{,}2]$$

$$\left.\begin{array}{l} f(-0{,}29) \approx -0{,}009 < 0 \\ f(-0{,}28) \approx 0{,}011 > 0 \end{array}\right\} \text{ donc } \alpha \in [-0{,}29\,;\,-0{,}28]$$

Il en résulte qu'une valeur approchée de $\propto$ au dixième près est : -0,3.

<u>Remarque</u> : avant d'attaquer la question d), il est souhaitable de dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Dans vos devoirs, pas mal d'anomalies aux limites, au sens de variation de f', etc. et des études bancales de signes notamment pour le signe de f'' ! Pourtant f'' avait le même signe qu'une fonction affine, donc pas dur du tout à déterminer.

Ecrire : <u>pour tout réel x</u>, $x - 3/2 \geqslant 0$ ne devrait plus figurer dans aucune copie. C'est loin d'être le cas !

<u>Réflexes</u> : on vérifie graphiquement les limites et le sens de variation en traçant la courbe avec sa calculatrice. Pour un devoir de 45 minutes, si on bloque à une question, il faut savoir passer aux suivantes (maximum 5 minutes à bloquer) en admettant le résultat demandé à la question.