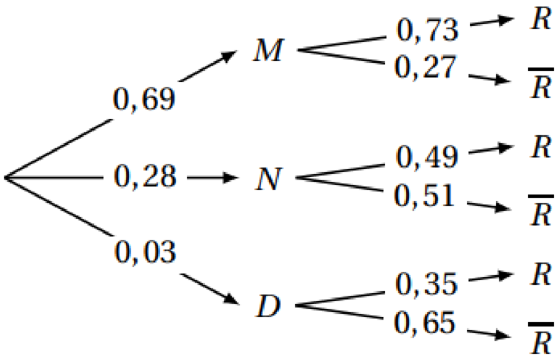
**Terminale Maths Groupe 1** **Corrigé du DS5** **Novembre 2024**

**Exercice I**

## Partie A

1. Puisqu'on prélève au hasard un déchet, on est en situation d'équiprobabilité et les proportions sont assimilables à des probabilités. On peut donc compléter l'arbre pondéré ci-contre.




2. L'évènement « le déchet est dangereux et recyclable » est $D \cap R$.

   $P(D \cap R) = P(D) \times P_D(R) = 0,03 \times 0,35 = 0,0105$.

3. $P\left(M \cap \overline{R}\right) = P(M) \times P_M\left(\overline{R}\right) = 0,69 \times 0,27 = 0,1863$.

   Dans le contexte de l'exercice, cela signifie que sur l'ensemble des déchets produits par l'entreprise, 18,63 % d'entre eux sont des déchets qui sont minéraux et non recyclables.

4. Les évènements $M$, $N$ et $D$ partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on en déduit :

   $P(R) = P(R \cap M) + P(R \cap N) + P(R \cap D) = 0,69 \times 0,73 + 0,28 \times 0,49 + 0,03 \times 0,35 = 0,6514$

   On obtient bien la probabilité annoncée.

5. La probabilité demandée est :

   $$P_R(N) = \frac{P(R \cap N)}{P(R)} = \frac{0,28 \times 0,49}{0,6514} = \frac{686}{3257} \approx 0,2106 \quad \text{au dix-millième près.}$$

## Partie B

1. **a.** On admet que la variable aléatoire $X$ suit une loi binomiale. Puisqu'elle compte le nombre de déchets recyclables, le succès est donc l'évènement $R$, de probabilité $p = 0,6514$, ceci dans un lot de 20 déchets, ce qui signifie qu'il y a eu $n = 20$ répétitions identiques et indépendantes.

   C'est donc la loi binomiale $\mathcal{B}(20\ ;\ 0,6514)$ que suit $X$.

   **b.** On cherche la probabilité de l'évènement $(X = 14)$. On a :

   $P(X = 14) = \binom{20}{14} p^{14} \times (1 - p)^{20-14} = \binom{20}{14} 0,6514^{14} \times 0,3486^{6} \approx 0,1723$ au dix-millième près.

*c.*

On cherche la valeur de la probabilité de l'évènement : $(X \geqslant 10)$.

Or, $p(\mathrm{X} \geqslant 10) = 1 - p(\mathrm{X} < 10) = 1 - p(\mathrm{X} \leqslant 9)$ car X est à valeurs entières.

$p(\mathrm{X} \geqslant 10) = 1 - \sum_{k=0}^{9} p(X = k) = 1 - \sum_{k=0}^{9} \binom{20}{k} \times 0{,}6514^{k} \times (1 - 0{,}6514)^{9-k}$.

Avec sa calculatrice, on trouve : $p(\mathrm{X} \geqslant 10) \approx 0{,}948$ à 0,001 près.

***d.*** Vu que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(20\ ;\ 0{,}6514)$, son espérance est :
$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = np = 20 \times 0{,}6514 = 13{,}028$.

En moyenne, par échantillon de 20 déchets, 13 seront recyclables.

**2.** Dans cette question, on prélève désormais $n$ déchets, où $n$ désigne un entier naturel strictement positif. On note $X_n$ la variable aléatoire qui compte le nombre de déchets recyclables dans ce nouvel échantillon. $X_n$ suit donc la loi binomiale de paramètres $(n\ ;\ 0{,}6514)$

**a.** On a $p_n = P(X_n = 0) = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = (1-p)^n = 0{,}3486^n$.

La probabilité qu'aucun déchet ne soit recyclable sur un échantillon de $n$ déchet est donc de $p_n = 0{,}3486^n$

**b.** L'évènement « au moins un déchet du prélèvement est recyclable » est contraire de celui dont on a calculé la probabilité à la question précédente. On est donc amené à résoudre :

$$\begin{aligned} 1 - p_n \geqslant 0{,}9999 &\iff -p_n \geqslant -0{,}0001 \\ &\iff p_n \leqslant 0{,}0001 \qquad \text{car } -1 < 0 \\ &\iff 0{,}3486^n \leqslant 0{,}0001 \end{aligned}$$

A l'aide de sa machine à calculer, on trouver que le plus petit entier $n$ à partir duquel ce seuil est atteint est 9.

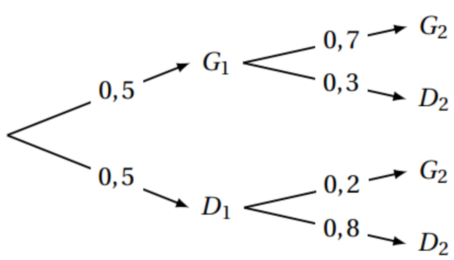
**<u>Exercice II</u>**

0) $g_1 = 0{,}5$, car Léa a autant de chance de gagner que de perdre la première partie.

**1.** D'après l'énoncé, si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70% des cas, elle perd donc la suivante dans 30 %.

On a donc $P_{G_1}(D_2) = 0{,}3$

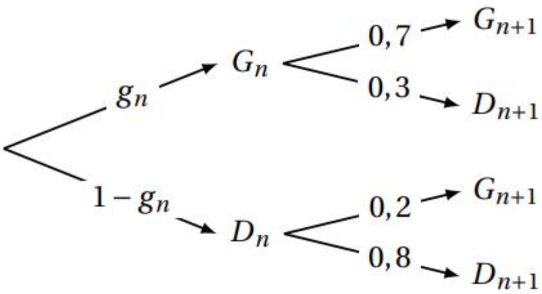
**2.** On a l'arbre suivant :




**3.** Les évènements $G_1$ et $D_1$ partitionnent l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} g_2 = P(G_2) &= P(G_1 \cap G_2) + P(D_1 \cap G_2) \\ &= 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}2 \\ &= 0{,}35 + 0{,}1 \\ &= 0{,}45 \end{aligned}$$

**4.a.** On a l'arbre suivant :




**b.** Pour tout entier naturel $n$ non nul, les évènements $G_n$ et $D_n$ déterminent une partition de l'univers, donc, d'après la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{aligned} g_{n+1} = P(G_{n+1}) &= P(G_n \cap G_{n+1}) + P(D_n \cap G_{n+1}) \\ &= g_n \times 0,7 + (1-g_n) \times 0,2 \\ &= 0,7g_n + 0,2 - 0,2g_n \\ &= 0,5g_n + 0,2 \end{aligned}$$

On arrive bien au résultat annoncé.

**5.** **a.** Soit $n$ un entier non nul.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= g_{n+1} - 0,4 \quad \text{par définition de la suite } (v_n) \\ &= 0,5g_n + 0,2 - 0,4 \quad \text{par définition de la suite } (g_n) \\ &= 0,5(v_n + 0,4) - 0,2 \quad \text{car } v_n = g_n - 0,4 \iff g_n = v_n + 0,4 \\ &= 0,5v_n + 0,2 - 0,2 \\ &= 0,5v_n \end{aligned}$$

La suite $(v_n)$ est donc une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_1 = g_1 - 0,4 = 0,5 - 0,4 = 0,1$

**b.** On peut donc en déduire que pour tout entier naturel $n$ non nul :

$v_n = v_1 \times q^{n-1} = 0,1 \times 0,5^{n-1}$

Or pour tout entier naturel n non nul $\quad g_n = v_n + 0,4 \quad$ donc $\quad g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4$.

**6.** Soit $n$ un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} g_{n+1} - g_n &= 0,1 \times 0,5^n + 0,4 - 0,1 \times 0,5^{n-1} - 0,4 \\ &= 0,1 \times 0,5^{n-1} \times (0,5-1) \\ &= 0,1 \times 0,5^{n-1} \times (-0,5) \\ &= -0,1 \times 0,5^n \end{aligned}$$

or $0,5 > 0$ et $0,1 > 0$ donc $g_{n+1} - g_n < 0 \iff g_{n+1} < g_n$

La suite $(g_n)$ est strictement décroissante.

**7.** $-1 < 0,5 < 1$, donc on en déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,5)^n = 0$, donc, par limite du produit et de la somme : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4 = 0,4$.

Sur le long terme, Léa gagnera son match dans 40 % des cas.

**8.*a*)**

Le programme complété est :

```
def seuil(e):
  g = 0.5
  n = 1
  while g > 0.4 + e :
    g = 0.5 * g + 0.2
    n = n + 1
  return(n)
```

**8.b.** On obtient sans difficulté n = 8 lorsque e = 0,001.

***Exercice III***

***Question 1 : réponse B***

***Question 2 : réponse B***

***Question 3 : réponse C***

***Question 4 : réponse A***

***Question 5 : réponse D***

***Question 6 : réponse B***