Exercice I

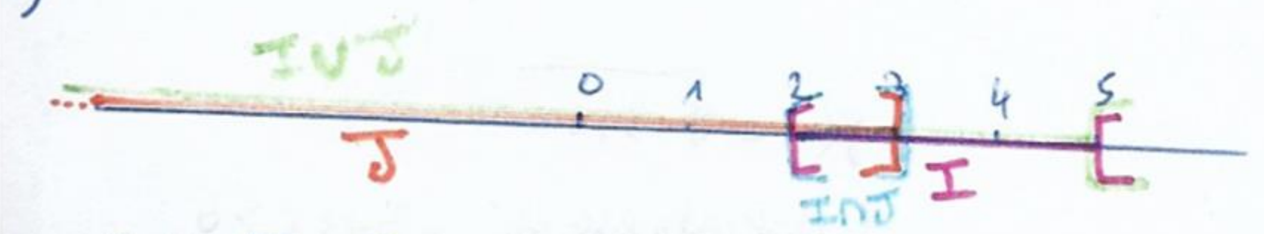
1) a) $x \in [-1;2[\iff -1 \leq x < 2$ b) $y \in]-\infty;8] \iff y \leq 8$.

b) ($x \neq -2$ & $x \neq 3$) équivaut à : ($x \in]-\infty;-2[\cup]-2;3[\cup]3;+\infty[$).

2) a) $1 < x \leq 9 \iff x \in]1;9]$.   b) $x < -2 \iff x \in]-\infty;-2[$.

3) a) $6 \notin]-1;6[$ b) $[0;4] \subset [-2;5[$ c) $-2 \in [-4;-2]$ d) $\pi \notin]-1;3{,}1415[$.

4)



$I \cap J = [2;3]$; $I \cup J =]-\infty;5[$.

Exercice II

a) $-3x+4 < x-11$

$-3x-x < -11-4$

$-4x < -15$

$x > \frac{-15}{-4}$ car $-4<0$

$x > \frac{15}{4}$

$S =]\frac{15}{4};+\infty[$

b) $-5x+8 \geq 2(1-x)$

$-5x+8 \geq 2-2x$

$-5x+2x \geq 2-8$

$-3x \geq -6$

$x \leq \frac{-6}{-3}$

$x \leq 2$

$S =]-\infty;2]$

c) $(2x+3)^2 > (4x-1)(x+5)$

$4x^2+12x+9 > 4x^2+20x-x-5$

$\cancel{4x^2}+12x+9 > \cancel{4x^2}+19x-5$

$12x-19x > -5-9$

$-7x > -14$

$x < \frac{-14}{-7}$

$x < 2$

$S =]-\infty;2[$.

Exercice III

1) a) $-2 \leq x < 4$ donc $-2-7 \leq x-7 < 4-7$, donc $\boxed{-9 \leq x-7 < -3}$

b) $-2 \leq x < 4$, donc $-8\times(-2) \geq -8x > -8\times 4$, donc : $16 \geq -8x > -32$ ou encore : $\boxed{-32 < -8x \leq 16}$.

c) $-2 \leq x < 4$, donc $-1 \leq \frac{x}{2} < 2$, donc $\boxed{0 \leq \frac{x}{2}+1 < 3}$.

d) $-2 \leq x < 4$, donc $8 \geq -4x > -16$, donc $23 \geq -4x+15 > -1$ ou encore : $\boxed{-1 < -4x+15 \leq 23}$.

2) a)
$$\begin{array}{c} -2 \leq x < 4 \\ 2 \leq y < 8 \\ \hline -2+2 \leq x+y < 4+8 \\ \boxed{0 \leq x+y < 12} \end{array}$$

b) $x-2y = x+(-2y)$.

or $2 \leq y < 8$, donc $-4 \geq -2y > -16$.

Donc :
$$\begin{array}{c} -2 \leq x < 4 \\ -16 < -2y \leq -4 \\ \hline \boxed{-18 < x-2y < 0} \end{array}$$

Exercice IV

a) $9{,}1 < \sqrt{84} < 9{,}2$

b) $9{,}16515 < \sqrt{84} < 9{,}16516$

c) $9{,}165 < \sqrt{84} < 9{,}166$

Exercice V

a) Lorsque $x = -4$, $x = 1$ et $x = 3$.

b) Sur chacun des intervalles : $]-\infty\ ;\ -4[$, $]1\ ;\ 3[$ et $]3\ ;\ +\infty[$.

c) Sur : $[-4\ ;\ 1]\cup\{3\}$.

d) $f(8) > 0$ et $f(0) < 0$.

Exercice VI

1) $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ac + a^2 = 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca$.

BONUS :

Le carré de n'importe quel nombre réel est toujours positif ou nul.

Donc, pour tous réels a, b et c : $(a-b)^2 \geqslant 0$, $(b-c)^2 \geqslant 0$ et $(c-a)^2 \geqslant 0$.

Par suite, $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geqslant 0$ en tant que somme de trois termes positifs ou nuls.

Donc d'après la question 1), on peut dire que :

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \geqslant 0$, donc : $2a^2+2b^2+2c^2 \geqslant 2ab+2bc+2ca$, donc $2(a^2+b^2+c^2) \geqslant 2(ab+bc+ca)$, donc après simplification par 2, et vu que 2>0, le sens de l'inégalité est inchangé, il vient que : $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$.